Exercice 2 corrigé et barème

Question préliminaire :

• Ecrivons $R(x) = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j\right)$

(1) si on dérive par rapport à x_k en regardant chacun des termes $x_i\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\right)$ comme un produit, on obtient

$$\frac{\partial R}{\partial x_k} = \sum_{j=1}^{n} a_{kj} x_j + \sum_{i=1}^{n} x_i a_{ik} = 2\sum_{j=1}^{n} a_{kj} x_j \quad \text{par symétrie}$$

$$= 2 \; j^{\text{ième}} \text{ ligne de } AX$$

(0,5) • D'après le cours R est strictement convexe si et seulement si sa matrice hessienne est définie positive. Or la matrice hessienne de R vaut $2A$ d'où le résultat.

Question 2 L'ensemble des contraintes $\{X \in \mathbb{R}^N,\ x_i \geq 0\ ;\ \sum c_i x_i = E_0\}$ est fermé (égalités ou inégalités au sens large)

borné car chaque x_i vérifie $0 \leq x_i \leq \frac{E_0}{c_i}$ donc compact.

Comme $R(x)$ est continue (polynôme) $\longrightarrow$ existence d'un minimum

(1,5) L'unicité vient de la stricte convexité

Question 3 Les conditions de Kuhn-Tucker s'écrivent (bonus de 0,5 s'ils font allusion et montrent la qualification des contraintes)

il existe $\lambda \in \mathbb{R}$, $\mu_1 \mu_2 \dots \mu_n \in \mathbb{R}_+$ tels que

(1,5)
$$\begin{cases} 2AX^* - \sum_{i=1}^{n} \mu_i e_i = \lambda C & \text{avec } C = [c_1\ c_2 \dots c_n]^T \\ & \text{où } e_i \text{ est le } i\text{ème vecteur de la base canonique} \\ \text{et } \mu_i x_i = 0 \quad i = 1 \dots n & \text{sans oublier } \sum c_i x_i = E_0 \end{cases}$$

Question 4 Cherchons à résoudre le système ci-dessus, en supposant tout d'abord chacun de $\mu_i = 0$ (c'est à dire qu'on cherche une solution avec $x_i > 0$)

On doit alors résoudre le système linéaire $AX^* = \frac{\lambda}{2} C$.

Determinons tout d'abord X_0 solution de $AX_0 = C$. On trouve

(2,5) $X_0 = \left[\frac{33}{13}, \frac{28}{13}, \frac{25}{13}\right]$. Ensuite par linéarité $X^* = \frac{\lambda}{2} X_0$ avec

$\frac{\lambda}{2}$ choisi pour que $C^T X^* = E_0 = 164$. Ce qui donne $\lambda = 26$

$X^* = [33, 28, 25]$