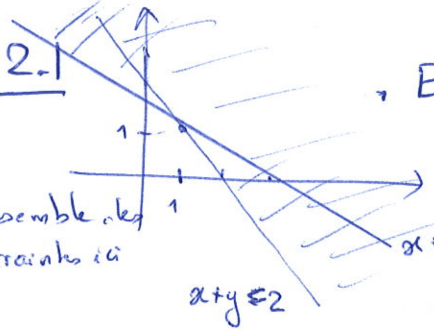
Corrigé des exercices de la 2ème séance

Exo 2.1



C ensemble des contraintes ici

• Existence $\max J(x,y) \geq 7 = J(0,0)$

On peut écrire

$$J(x,y) = -(x-7)^2+49-(y-3)^2+9+7$$
$$= 65-(x-7)^2-(y-3)^2$$

ce qui montre que $J(x,y) \to -\infty$ q^d $|(x,y)| \to +\infty$

(ou $d((x,y),(7,3)) \to +\infty$)

ou alternativement, vous pouvez dire que

$J(x,y) \leq 1$ dès que $(x-7)^2+(y-3)^2 \geq 8^2$ (donc dès qu'on est en dehors du ~~disque~~ centré en $(7,3)$ de rayon 8)

donc il suffit de chercher le maximum de J sur $C \cap \text{Disque}((7,3),8)$ qui est compact $\to$ existence.

• On peut résoudre le problème géométriquement : les lignes de niveau de J sont des cercles centrés en $(7,3)$ et on cherche le plus petit de ces cercles qui vient rencontrer l'ensemble des contraintes. $\longrightarrow$ Je vous conseille de leur donner cette interprétation géométrique après qu'ils aient résolu par Kuhn-Tucker car ça explique bien KT.

• KT : $\exists \mu_1, \mu_2 \geq 0$ / $\underset{\text{car on maximise ici}}{-}\nabla J + \mu_1 \nabla g_1 + \mu_2 \nabla g_2 = 0$ (où $g_1(x,y) = x+y-2$, $g_2(x,y) = x+2y-3$)

et $\mu_1 = 0$ si $g_1(x,y) < 0$
$\mu_2 = 0$ si $g_2(x,y) < 0$

ou alors on suppose $\underline{\mu_1 \leq 0}$ et $\underline{\mu_2 \leq 0}$ ici

$$\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 14-2x \\ 6-2y \end{pmatrix} + \mu_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 0$$

On envisage les 4 cas :

(i) $g_1 < 0$ et $g_2 < 0$ d'où $\mu_1 = \mu_2 = 0$ et $x = 7$ $y = 3$ $\notin C$ (logique !)

(ii) $g_1 = 0$ et $g_2 < 0$ $\quad \mu_2 = 0$ et $x+y=2$ $\longrightarrow$ $x = 7 + \frac{\mu_1}{2}$, $y = 3 + \frac{\mu_1}{2}$ et $10 + \mu_1 = 2 \Rightarrow \mu_1 = -8$ qui fournit $\boxed{x = 3 \,;\, y = -1}$

qui est admissible (et donne une valeur $\boxed{J(x,y) = 33}$

(iii) $g_1 < 0$ et $g_2 = 0$ $\quad \mu_1 = 0$, $x+2y=3$ $\longrightarrow$ $x = 7 + \mu_2/2$, $y = 3 + \mu_2$ et $\frac{5}{2}\mu_2 + 13 = 3 \longrightarrow \mu_2 = -4$, $x = 5, y = -1 \notin C$

(iv) $g_1 = 0$ et $g_2 = 0$ qui correspond au point d'intersection $(1,1)$ mais $J(1,1) = 25$ moins bon

Ex 2.2

1)  $Vol = abc$. On veut donc résoudre le problème

$$\text{Max of } abc \;;\; \left\{ \begin{array}{l} a \geq 0 \\ b \geq 0 \\ c \geq 0 \end{array} \quad a+b+c \leq L \right\}$$

Le domaine des contraintes est clairement fermé (inégalités $\leq$) et il est inclus dans $[0, L]^3$ (car chaque dimension $\leq$ somme $\leq L$) donc il est borné $\longrightarrow$ existence.

KT : il n'est pas nécessaire de regarder la saturation des contraintes $a = 0$ (ou $b = 0$ ou $c = 0$) qui donnerait une valeur de $Vol = 0$ qui est clairement le minimum et non le maximum.

Donc on va supposer $a > 0$, $b > 0$ et $c > 0$ à l'optimum. Ce qui conduit à $\exists \mu \geq 0$ /

$$\begin{pmatrix} bc \\ ca \\ ab \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ou $bc = ca = ab \; \underset{\neq 0}{(= -\mu)} \Longrightarrow a = b = c = \frac{L}{3}$

le bagage optimal est cubique (sans surprise).

2) Ici on rajoute les contraintes $a \geq 60$, $c \geq 20$ (en supposant qu'on placera le cache au fond de notre valise)

D'où les conditions de KT vont s'écrire

$$\exists \mu_1, \mu_2, \mu_3 \geq 0 \;/\; \nabla Vol + \mu_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

avec $\mu_1 = 0$ si $a+b+c < 120$, $\mu_2 = 0$ si $a > 60$, $\mu_3 = 0$ si $c > 20$. Une discussion du même type que dans l'exo 1 conduit à (on voit tout de suite que $\mu_1 = 0$ est impossible, donc $a+b+c = 120$. De même $\mu_2 = \mu_3 = 0$ impossible car la solution de 1) ne satisfait pas les nouvelles contraintes).

$\mu_2 = 0$ $\mu_3 \neq 0 \longrightarrow \begin{array}{l} a = b = 50 \\ c = 20 \end{array} \notin C$; $\mu_2 \neq 0$ $\mu_3 = 0 \longrightarrow \boxed{\begin{array}{l} b = c = 30 \\ a = 60 \end{array} \longrightarrow Vol = 54\,dm^3}$

enfin $\mu_2 \neq 0$, $\mu_3 \neq 0 \longrightarrow a = 60$, $c = 20$, $b = 40 \longrightarrow Vol = 48\,dm^3$

Ex 2.3 :

Benefice $= p_1 q_1 + p_2 q_2 -$ Coût

$= (256 - 3q_1 - q_2) q_1 + (222 - q_1 - 5q_2) q_2 - (q_1^2 + q_1 q_2 + q_2^2)$

$= -4q_1^2 - 6q_2^2 - 3q_1 q_2 + 256 q_1 + 222 q_2$

qu'on veut maximiser sous les contraintes
$$256 - 3q_1 - q_2 \geq 10$$
$$222 - q_1 - 5q_2 \geq 10$$

Cela ressemble beaucoup à Ex 2.1. KT s'écrit

$$\begin{pmatrix} -8q_1 - 3q_2 + 256 \\ -12q_2 - 3q_1 + 222 \end{pmatrix} + \mu_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{avec } \mu_1 \leq 0,\ \mu_2 \leq 0$$

(1) $\mu_1 = \mu_2 = 0 \rightarrow q_1 = 27.65$, $q_2 = 11.58$ $\in$ ensemble de contraintes

Comme la fonction Benefice est clairement strict concave elle a un maximum unique sur $\mathbb{R}^2$ qui est solution de $\nabla B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ qui est donc le couple q_1, q_2 qu'on vient de calculer. Le max sur $\mathbb{R}^2$ est donc = max sur l'ensemble des contraintes et il est inutile de traiter les autres cas.

Après on peut discuter si on veut une solution en nombres entiers. Sans rien y connaître, on peut essayer les couples d'entiers au voisinage du (q_1, q_2) trouvé.

Ex 2.4 C'est plus un exercice récréatif car il n'a pas beaucoup de liens avec le cours (sauf qu'on réalise qu'en théorie des jeux, on tombe facilement sur des problèmes de min-max ou de max-min). L'exercice est là pour provoquer la discussion et le débat car il n'y a pas une solution unique selon qu'on souhaite plutôt

- maximiser son profit :
  * en 1ère itération, on peut estimer que l'espérance de gain de la ligne n° i est $\sum_{j=1}^{6} a_{ij}$. Donc le joueur choisit (s'il ne s'occupe pas du joueur 2) i_0 tel que $\sum_{j=1}^{6} a_{i_0 j}$ soit maximum (et 2 choisit j_0 / $-\sum_{i=1}^{5} a_{ij_0}$ soit max.)
  * en 2ème itération : chaque joueur se dit que l'autre va suivre la stratégie décrite ci-dessus. D'où 1 choisit de résoudre

$$\max_i \left(\min_j \sum a_{ij} \right) \quad \left(\text{j'ai transformé } \max(-\Sigma) \text{ en } \min \Sigma \right)$$

tandis que 2 résout $\min_j \max_i \sum a_{ij}$

  * et rien n'empêche de continuer ...

- minimiser son risque de perte : là je veux perdre le moins possible ce qui conduirait plutôt à des stratégies du type

~~1re itération~~ 1 choisit i / $\max_i \left(\min_j a_{ij} \right)$

risque de perte sur la ligne i

2 choisit j / $\min_j \left(\max_i a_{ij} \right)$