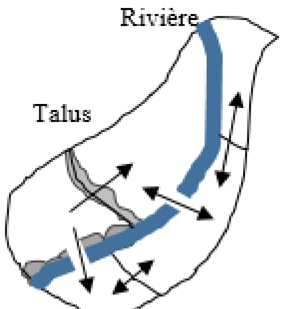
Examen de Recherche Opérationnelle
Partie Graphes

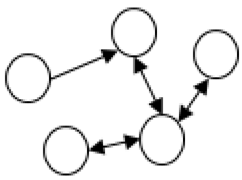
Lundi 9/1/2016 – 8h30-11h30

Exercice 1 : modéliser un problème de nivellement par un graphe

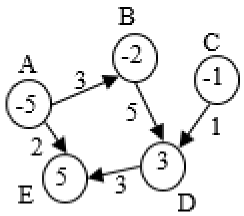
Niveler un terrain consiste à enlever de la terre à certains endroits pour l'apporter à d'autres afin d'obtenir le profil souhaité. En première approximation et après discrétisation du terrain à niveler en cellules homogènes, on détermine un excédent à enlever à certaines cellules et un déficit à combler sur d'autres cellules.



Graphe 1



Graphe 2



Graphe 3

Par exemple, sur cette zone à niveler (graphe 1), traversée par une rivière et un talus, les flèches représentent les communications entre les cinq cellules qui sont le résultat d'une discrétisation du terrain (voir graphe 2).

Un problème de nivellement, après discrétisation, peut donc être modélisé par un graphe dont les sommets sont les cellules et dont les arcs représentent les possibilités de communication entre cellules. Le terrain ci-dessus est modélisé par le graphe ci-contre :

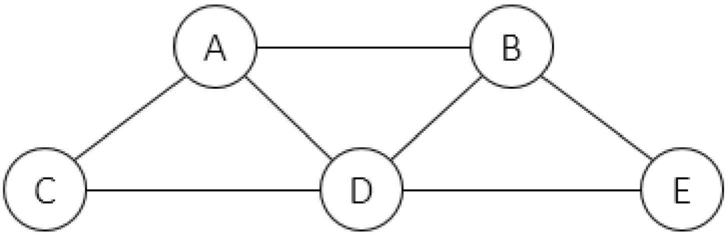
On notera en chaque sommet la quantité de terre à enlever (négative) ou à apporter (positive). On supposera que le nivellement se fait sans import ou export de terre, la somme de ces quantités est donc nulle. Le coût (temps, argent, énergie, …) du transport d'une quantité de terre sur un arc est proportionnel à la quantité transportée et au coût unitaire sur l'arc. Pour simplifier les notations et sans nuire à la généralité du problème on supposera que le coût unitaire est égal à 1 sur chaque arc. Dans l'exemple du graphe 3 on transporte 3 unités de A vers

B, 2 de A vers E, 5 de B vers D, 1 de C vers D, 3 de D vers E. Le bilan est donc -5 en A, -2 en B, -1 en C, +3 en D, +5 en E. Les arcs DB, DC et ED sont inutilisés. Le coût de ce nivellement est 14 (2+3+5+1+3). D'autres solutions existent pour un même résultat mais à un coût différent ; il existe pour cet exemple une solution évidente beaucoup moins couteuse (coût 8) !

Question préliminaire

Rappel : Dans un graphe non orienté, un cycle est une suite d'arêtes consécutives (chaine) dont les deux sommets extrémités sont identiques.

Enumérer, dans le graphe 5, la liste des cycles à au moins 3 sommets.



Graphe 5

En s'inspirant de l'algorithme de parcours en profondeur d'abord, donner l'analyse (sans entrer dans les détails) ou l'idée générale de l'algorithme qui calcule tous les cycles d'un graphe non orienté (le graphe est supposé fortement connexe).

Question préliminaire - Correction

Liste des cycles : 1 point

A:B:D:A

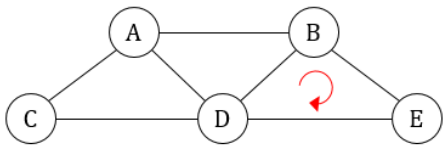
A:C:D:A

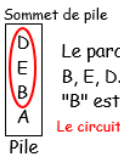
B:D:E:B

A:B:D:C:A

A:B:E:D:A

A:B:E:D:C:A





Le parcours en profondeur d'abord a empilé A, B, E, D. Examen du successeur "B" de "D". "B" est déjà marqué.

Le circuit BEDB est trouvé dans la pile

Explication : dans le cours de l'exploration en profondeur d'abord depuis "A" (exemple), l'explorationconstruit la liste A, B, E, D (exemple) puis atteint le sommet "B" déjà marqué. Dans ce cas, un circuit est présent dans la pile. Reculer dans la pile à la recherche du sommet "B" et afficher le circuit. Continuer à explorer les successeurs de "D" puis, une fois ceci effectué, dépiler "D" et le marquer à "non marqué".

Si un successeur est non marqué, simplement l'empiler et exécuter la procédure récursive à partir de ce successeur.

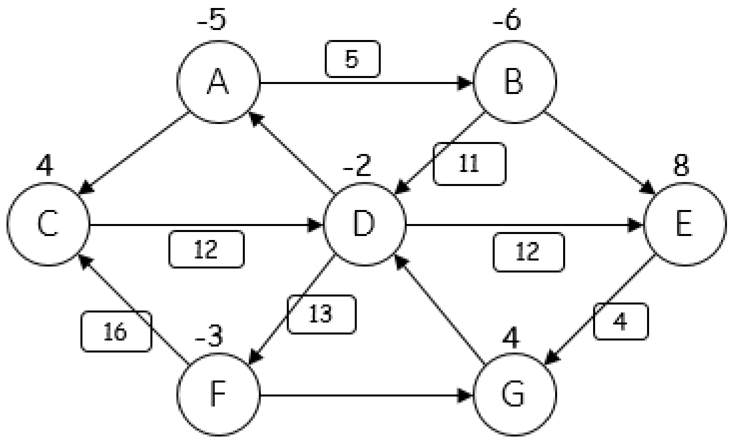
```
Algorithme de calcul des cycles (ou circuits) à partir d'un sommet.
Préparation de l'appel :
- Marquer tous les sommets du graphe G à "non marqué"
- Initialiser la pile P à vide
- Choisir un sommet de départ S
- ExploreCircuit (S, G, P)

Procédure récursive ExploreCircuit :

ExploreCircuit (S, G, P)
   - Marquer le sommet S à "Marqué"
   - Empiler S dans la pile P
   - Pour Suc dans liste des successeurs de S
        - Si Suc est marqué alors
           // un circuit est présent dans la pile
           - Afficher le circuit présent dans la pile à partir du sommet de la pile
           sinon
           - ExploreCircuit (Suc, G, P)
          Fsi
     Fpour
   - Marquer le sommet S à "non marqué"
   - Dépiler la pile P
Fin ExploreCircuit
```

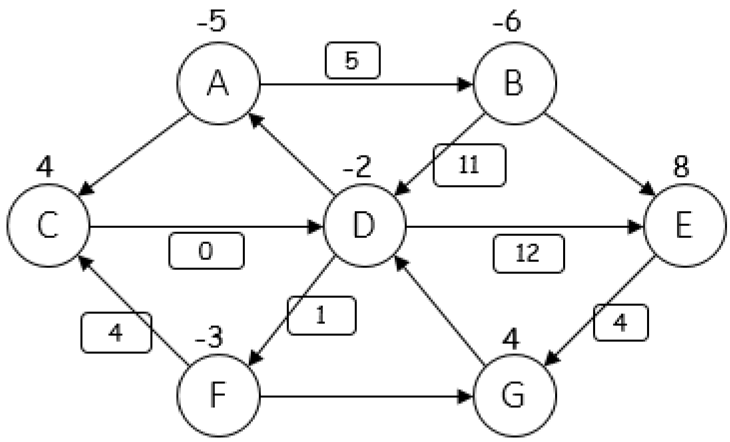
Pour l'algorithme : 1 point. Remarque : cet algorithme est difficile. Je propose de donner un point si l'étudiant trouve que le circuit figure dans la pile quand l'exploration en profondeur d'abord rencontre un sommet marqué ou bien s'il trouve un algorithme personnel que vous pensez juste.

Question 1
Le graphe 4 donne un problème de nivellement (les quantités transportées figurent dans les rectangles à coins arrondis. Quand il n'y a pas de rectangle, c'est qu'il n'y a pas de transport). Quel est son coût ? Donnez une meilleure solution en modifiant seulement les quantités transportées sur le circuit CDFC. Quel est le nouveau coût ?
Recopier lisiblement le graphe avec les valeurs transportées modifiées sur CDFC.



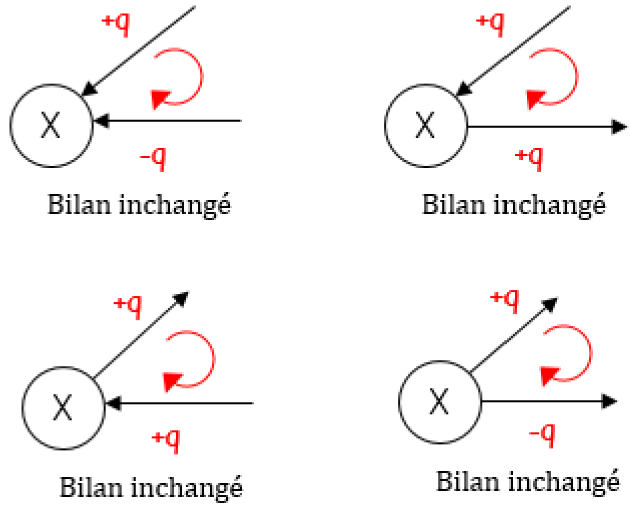
Graphe 4

Question 1 - Correction
Le coût vaut 5+11+12+12+16+13+4 = 73. 1 point.
Il est possible de diminuer chaque transport sur CDFC de 12. Le coût passe de 73 à 73-3*12=37. 1 point.



Question 2
Un meilleur graphe a été trouvé à la question 1 mais il n'est pas optimal. Trouver un algorithme itératif qui crée une suite de graphes améliorés. La démonstration de la preuve n'est pas demandée. Bien formaliser la démarche et bien mettre en évidence le dernier graphe trouvé et son coût associé.

Question 2 - Correction
Algorithme : pour un graphe donné, trouver un cycle améliorant tel que l'ajout d'une valeur q sur les arcs "avants" et l'ajout d'une valeur -q sur les arcs arrières (q de signe quelconque) fournisse un coût de nivellement plus petit. Le flux associé à une arête ne doit pas devenir négatif. Cas possibles au niveau d'un sommet X :

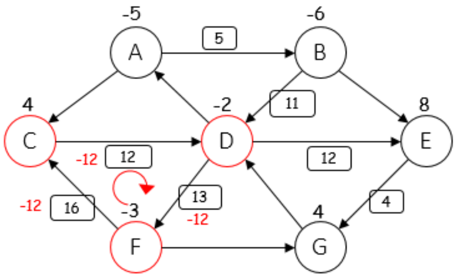


Bilan au sommet X appartenant à
un certain cycle : 4 cas possibles

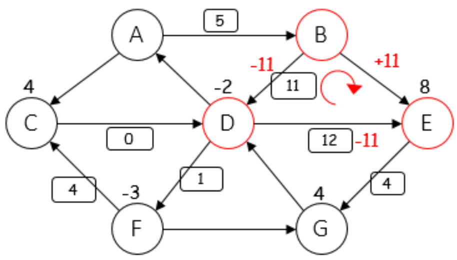
1 point pour le principe de l'algorithme.

Itérations possibles :

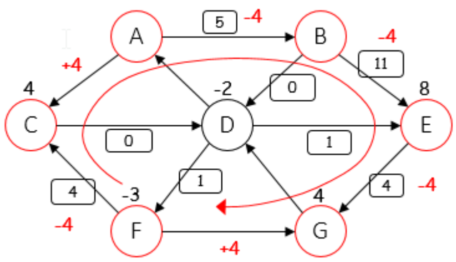
Résolution itérative avec recherche de cycles améliorants : 3 étapes sont nécessaires.



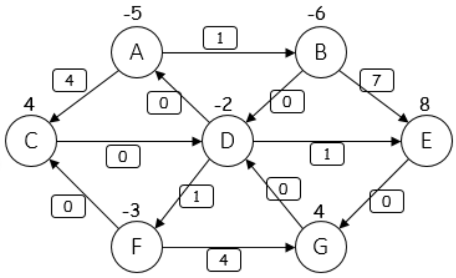
Le coût vaut 5+11+12+12+16+13+4 = 73.
Détection du cycle améliorant CDFC



Le coût vaut 73-3*12 = 37. Détection du cycle améliorant BEDB



Le coût vaut 37-11 = 26. Détection du cycle améliorant FCABEGF



Le coût vaut 26-2*4 = 18. Il n'existe plus de cycle améliorant donc cette olution est optimale

2 points pour le dernier graphe de coût 18.