Ecole des Mines de Nancy
Option Ingénierie
Mathématique

13 Janvier 2016
Durée : 3 heures

Équations aux dérivées partielles : Test

Exercice 1 : Soit Ω l'ouvert de $\mathbb{R}^2$ défini par

$$\Omega = \{(x, y);\ 0 < x < 1,\ 0 < y < x^3\}.$$

On considère la fonction définie par $v(x, y) = x^\alpha$. Quelles sont les valeurs de α pour lesquelles

- v est dans $H^1(\Omega)$?
- v est dans $L^2(\partial\Omega)$?

En déduire que le Théorème de trace n'est pas valable pour cet ouvert Ω.

Exercice 2 : Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, pour toute fonction f_k de $L^2(\Omega)$, on notera u_k la solution de

$$\begin{cases} -\Delta u_k = f_k & \text{dans } \Omega \\ u_k = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

1) Montrer que si $f_1 \geq f_2$ sur Ω, alors $u_1 \geq u_2$ sur Ω.
2) Montrer que si f_n converge (fortement) vers f dans $L^2(\Omega)$, alors u_n converge (fortement) vers u dans $H_0^1(\Omega)$.
3) Montrer que si f_n converge faiblement vers f dans $L^2(\Omega)$, alors u_n converge faiblement vers u dans $H_0^1(\Omega)$.

Exercice 3 : Soit Ω un ouvert borné, connexe, régulier de $\mathbb{R}^N$, f une fonction de $L^2(\Omega)$, g une fonction de $L^2(\partial\Omega)$. On considère la forme bilinéaire a et la forme linéaire L définies sur $H^1(\Omega)$ par :

$$a(u, v) := \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}\right) dX + \int_\Omega uv\, d\sigma$$

$$L(v) := \int_\Omega fv\, dX + \int_{\partial\Omega} gv\, d\sigma\ .$$

1) Montrer que le problème :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in H^1(\Omega) \text{ telle que pour toute } v \in H^1(\Omega) \\ a(u, v) = L(v). \end{cases}$$

possède une solution unique u.
2) En admettant que cette solution u est dans $H^2(\Omega)$, retrouver l'équation aux dérivées partielles satisfaite par u (y compris les conditions aux limites).

TSVP

Exercice 4 : Soit f une fonction de $L^2(]0,1[)$, a une fonction de $L^\infty(]0,1[)$ vérifiant $a(x) \geq a_0 > 0$ et β une constante réelle. On veut résoudre l'équation suivante :

$$\begin{cases} -u'' + a(x)u(x) = f(x) & x \in]0,1[\\ u'(0) - \beta u(0) = 0 \\ u'(1) - \beta u(1) = 0\,. \end{cases} \tag{1}$$

1) Ecrire une formulation variationnelle pour l'équation (1).
2) Trouver une condition suffisante, portant sur β, pour que la forme bilinéaire soit coercive. Montrer, dans ce cas l'existence et l'unicité d'une solution u pour la formulation variationnelle. Montrer que u est solution de l'équation (1) en un sens classique.

Exercice 5 : Soit Ω le rectangle $]-1,1[\times]0,1[$, $\Omega_1 =]-1,0[\times]0,1[$ et $\Omega_2 = \Omega \setminus \overline{\Omega}_1$. Soit α la fonction, constante par morceaux, définie sur Ω par :

$$\alpha = \begin{cases} \alpha_1 & \text{sur } \Omega_1 \\ \alpha_2 & \text{sur } \Omega_2 \end{cases}$$

avec $\alpha_1 \geq \alpha_2 > 0$. On se donne une fonction $f \in L^2(\Omega)$ et on considère le problème :

$$\begin{cases} -\text{div}(\alpha \nabla u) = f & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur le côté vertical } x = -1 \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{sur les trois autres côtés} \end{cases} \tag{2}$$

1) Écrire une formulation variationnelle pour le problème (2). Montrer que ce problème admet une solution unique u (on pourra démontrer la coercivité par l'absurde).
2) Montrer que la fonction u, solution de (2) vérifie

$$\alpha_1 \frac{\partial u_{\setminus \Omega_1}}{\partial x} = \alpha_2 \frac{\partial u_{\setminus \Omega_2}}{\partial x}$$

sur la droite $x = 0$.