Année 2016-2017

Équations aux dérivées partielles

Polycopié rédigé par Antoine Henrot

Cours de l'option IM

Semestre 7 : 2016-2017

Ecole des Mines de Nancy - Campus Artem - 54 042 Nancy Cedex
Tel : 03 55 66 28 10 - email: antoine.henrot@univ-lorraine.fr

Table des matières

Chapitre 1

Introduction, exemples et notations

1.1 Notations

De très nombreux problèmes en physique, en mécanique bien sûr mais aussi en chimie (systèmes de réaction-diffusion) en biologie ou écologie (dynamique des populations) en économie (gestion de stocks), en finance (pricing d'options et de produits dérivés) sont modélisés à l'aide d'équations aux dérivées partielles, en abrégé edp. Une edp est une relation entre les dérivées partielles de fonctions de plusieurs variables. Des exemples fondamentaux seront donnés tout au long de ce premier chapitre.

Dans les applications on aura le plus souvent des variables d'espace : x, y, z et une variable temps : t. Mais on pourra également trouver d'autres variables : par exemple dans un problème de dynamique des populations on aura à prendre l'âge comme variable ou dans un problème de cinétique des particules, les composantes de la vitesse de la particule interviendront également comme variables. Pour présenter des développements mathématiques nous utiliserons souvent des variables vectorielles $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ parcourant un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$. L'espace $\mathbb{R}^n$ sera toujours muni de sa structure euclidienne : on notera $|x| = (x_1^2 + \ldots + x_n^2)^{1/2}$ la norme du vecteur x et $x.y = x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n$ le produit scalaire des vecteurs x et y.

Rappelons que si u est une fonction numérique de n variables, sufisamment différentiable (à moins que les dérivées ci-dessous soient comprises au sens des distributions, voir chapitre suivant), on désigne par **gradient** de u, noté grad u(x) ou $\nabla u(x)$ le vecteur

$$\nabla u(x) = (\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n})$$

tandis que si $V = (V_1, V_2, \ldots, V_n)$ est une fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ on appelle **divergence** de V, et on note div V, la fonction

$$\mathrm{div} V(x) = \frac{\partial V_1}{\partial x_1} + \frac{\partial V_2}{\partial x_2} + \ldots + \frac{\partial V_n}{\partial x_n}.$$

Enfin, on appelle **laplacien** de u et on note Δu la fonction définie par

$$\Delta u(x) = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \ldots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} = \mathrm{div}(\nabla u(x)).$$

On appelle fonction harmonique sur l'ouvert Ω toute fonction u vérifiant
$\Delta u = 0$ sur Ω. La théorie des fonctions harmoniques est très riche : formule de la moyenne, principe du maximum, inégalités de Harnack. Nous avons déjà vu une partie de ces résultats dans le cours de Fonctions holomorphes en première année. En effet, en dimension 2, les fonctions harmoniques sont reliées aux fonctions holomorphes puisque la partie réelle d'une fonction holomorphe est harmonique, et réciproquement, toute fonction harmonique est la partie réelle d'une fonction holomorphe sur tout ouvert simplement connexe.

On utilisera beaucoup dans la suite les formules d'intégration par parties en dimension N, connues sous le nom de formule de Green ou formule de Stokes :
si Ω est un ouvert assez régulier (par exemple dont le bord possède un plan tangent en tout point) et u et v sont deux fonctions de $L^2(\Omega)$ dont les dérivées premières (éventuellement à comprendre au sens des distributions) sont dans $L^2(\Omega)$, alors on a :

$$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} v dx = \int_\Gamma u v n_i d\sigma \; - \; \int_\Omega \frac{\partial v}{\partial x_i} u dx \tag{1.1}$$

où n_i est la ième composante du vecteur normal à Γ dirigé vers l'extérieur.
On en déduit facilement que si u et v sont deux fonctions de $L^2(\Omega)$ dont les dérivées secondes pour u et premières pour v sont dans $L^2(\Omega)$, alors on a :

$$\int_\Omega \Delta u v dx = \int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial n} v d\sigma \; - \; \int_\Omega \nabla u . \nabla v dx \tag{1.2}$$

Exercice 1.1 : En dimension deux, déterminer tous les polynômes harmoniques de degré inférieur ou égal à 4. Déterminer également toutes les fonctions harmoniques $u(x, y)$ qui s'écrivent sous la forme $v(x)w(y)$ (c'est-à-dire à variables séparables).

Exercice 1.2 : En dimension deux, on note (r, θ) les coordonnées polaires (définies par $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta)$). Exprimer le gradient et le laplacien d'une fonction u grâce aux coordonnées polaires. En déduire toutes les fonctions harmoniques radiales (c'est-à-dire qui ne dépendent que de r) sur une couronne ne contenant pas l'origine.
On trouve pour expression du laplacien

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}.$$

Exercice 1.3 : En dimension trois, déterminer l'expression du laplacien en coordonnées sphériques $(x = r\cos\theta\sin\phi, y = r\sin\theta\sin\phi, z = r\cos\phi)$. En déduire toutes les fonctions harmoniques radiales en dimension trois.
On trouve pour expression du laplacien en dimension 3

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\left(\frac{1}{\sin^2\phi}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{\cos\phi}{\sin\phi}\frac{\partial u}{\partial \phi} + \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2}\right).$$

1.2 Des exemples d'e.d.p. :

1.2.1 L'équation de la chaleur

Imaginons une pièce, représentée par un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, chauffée par une source de chaleur définie par une fonction f que l'on suppose connue. On désigne par $u(t,x,y,z)$ la température à l'instant t et au point de coordonnées (x,y,z). L'équation qui relie la température à la source de chaleur (dite équation de la chaleur) est :

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = f \qquad \text{pour } t > 0 \text{ et } (x,y,z) \in \Omega \tag{1.3}$$

Il est clair que cette seule équation n'est pas suffisante pour déterminer la température dans la pièce à tout instant. Pour celà il est nécessaire de connaître de plus les conditions initiales et les conditions aux limites. Précisons ce qu'on entend par là.
Se donner les conditions initiales, c'est se donner la répartition de température dans toute la pièce à l'instant $t = 0$, c'est-à-dire se donner une fonction u_0 telle que

$$u(0,x,y,z) = u_0(x,y,z) \quad \text{sur } \Omega.$$

Se donner les conditions aux limites, c'est se donner des renseignements sur la fonction u ou ses dérivées sur le bord du domaine. Ils peuvent être de différents types, voyons les principaux.

Condition de Dirichlet c'est se donner la valeur de la fonction u sur tout ou partie du bord, par exemple $u = g$ sur $\partial\Omega$. Physiquement celà correspondrait au cas d'une paroi si mince que la température sur celle-ci serait exactement la température extérieure.

Condition de Neumann c'est se donner la valeur du flux de température sur tout ou partie du bord. Le flux de température est par définition égal à la dérivée normale de la fonction u, c'est-à-dire à $\frac{\partial u}{\partial n} = \nabla u.n$ où n est le vecteur normal extérieur à $\partial\Omega$. Une condition de Neumann est donc une condition du type $\frac{\partial u}{\partial n} = g$. Par exemple la condition $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$ sur $\partial\Omega$ correspondrait physiquement au cas d'une paroi parfaitement isolée.

Condition de Fourier ou de Robin c'est se donner une relation linéaire entre le flux et la température sur tout ou partie du bord. C'est-à-dire qu'on a une égalité du type $\frac{\partial u}{\partial n} + \alpha u = g$ sur $\partial\Omega$ ou une partie de $\partial\Omega$. Physiquement celà correspondrait à une paroi partiellement isolante où le flux de température serait par exemple proportionnel au différentiel de température entre l'extérieur et l'intérieur.

Il est possible, comme on peut l'imaginer au vu de l'exemple ci-dessus, d'avoir ensemble plusieurs types de conditions au bord sur des parties différentes de $\partial\Omega$, mais il est important de n'en avoir qu'une seule à la fois sur une partie donnée de la frontière.
Le travail du mathématicien consiste à prouver que le problème qu'on considère est **bien posé** c'est-à-dire qu'il possède une solution et une seule et que celle-ci dépend continûment des données (définition due à Hadamard). Ce n'est pas toujours le cas comme le montrent les exemples donnés dans les exercices 4 et 5 ci-dessous. La plus grande partie de ce cours sera consacrée à mettre en place des outils permettant de répondre à ces questions mathématiques dans certains cas (mais pas tous malheureusement).

L'exemple d'e.d.p. donnée ci-dessus est un exemple d'équation linéaire en u (la fonction inconnue u n'apparaît qu'à la puissance un dans l'équation). Ces équations sont beaucoup plus faciles à traiter (d'un point de vue théorique et d'un point de vue numérique) et on peut considérer que la théorie est bien établie maintenant pour le cas linéaire. Mais de nombreux problèmes physiques se modélisent à l'aide d'équations non linéaires. Il serait trop long ici d'en donner la liste, vous aurez largement l'occasion d'en voir lors d'autres cours de l'Ecole.
Donnons maintenant d'autres exemples d'e.d.p. (linéaires) qui sont de nature différentes à celle de l'équation de la chaleur.

1.2.2 L'équation de Laplace

Imaginons que dans l'exemple précédent la source de chaleur f ne dépende pas du temps (i.e. $f(t,x,y,z) = f(x,y,z)$). Au bout d'un temps relativement court la température de la pièce va se stabiliser (au sens où, en chaque point elle deviendra indépendante du temps), on dira alors qu'elle a atteint un régime stationnaire (ou permanent). Dans l'équation aux dérivées partielles qui régissait la température, le terme en $\frac{\partial u}{\partial t}$ va alors s'annuler et l'équation reliant u à f va s'écrire :

$$-\Delta u = f \qquad \text{pour} \quad (x,y,z) \in \Omega \tag{1.4}$$

Cette équation s'appelle équation de Laplace.
En plus de l'équation, posée dans Ω, il convient là encore de préciser les conditions au bord, c'est-à-dire le comportement de la fonction cherchée u sur Γ. Ces conditions au bord peuvent être exactement les mêmes que dans le cas de l'équation de la chaleur. On peut donc rencontrer là aussi des conditions de Dirichlet, de Neumann ou de Fourier. En revanche les conditions initiales n'ont pas d'objet ici puisque la variable temps n'intervient pas dans l'équation.

1.2.3 L'équation des ondes

Considérons maintenant une membrane plane occupant un domaine Ω de $\mathbb{R}^2$ et attachée à un cerceau Γ (imaginez un tambour). Supposons maintenant que la membrane soit soumise à une force extérieure $f(x,y)$ ($f(x,y)$ représente l'intensité de la force au point de coordonnées (x,y)). Sous l'effet de la force f, la membrane va se mettre à vibrer. Notons $u(x,y)$ le déplacement (vertical) du point de coordonnées (x,y) de la membrane. L'équation reliant le déplacement inconnu u et la force appliquée est l'équation des ondes :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = f \qquad \text{pour } t > 0 \text{ et } (x,y) \in \Omega.$$

En plus de cette équation, il convient ici de donner des conditions initiales décrivant l'état de la membrane au début de l'expérience. Comme l'équation est du deuxième ordre en t, il est nécessaire de donner deux conditions. Plus précisément il faut connaître à la fois la position initiale de la membrane et sa vitesse initiale. Les conditions sont donc du type :

$$u(0,x,y) = u_0(x,y) \quad \text{et} \quad \frac{\partial u}{\partial t}(0,x,y) = u_1(x,y)$$

où u_0 et u_1 sont des fonctions connues.
Enfin dans le cas décrit ici, comme la membrane est attachée sur $\partial\Omega$, son déplacement est nul sur le bord et on aura donc une condition de Dirichlet homogène :

$$u = 0 \ \text{ sur } \Gamma.$$

1.2.4 Classification des équations

Les trois exemples présentés ci-dessus ne sont pas innocents puisqu'ils représentent en fait une équation de chacun des types classiques :
L'équation de Laplace est dite **elliptique**, l'équation de la chaleur est dite **parabolique** tandis que l'équation des ondes est dite **hyperbolique**. D'où vient cette dénomination et à quoi correspond elle ?
Si l'on remplace formellement les dérivées partielles par un symbole de degré correspondant (i.e. $\frac{\partial u}{\partial t}$ par T ou $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ par X^2 par exemple), à l'opérateur de Laplace Δ (en dimension deux) correspond alors le symbole X^2+Y^2, à l'opérateur de la chaleur $\frac{\partial}{\partial t}-\Delta$ correspond le symbole $T-(X^2+Y^2)$, tandis qu'à l'opérateur des ondes $\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\Delta$ correspond le symbole $T^2-(X^2+Y^2)$. On reconnaît là respectivement des équations de cercle (ou d'ellipse plus généralement), de paraboloïde et d'hyperboloïde ce qui explique la terminologie choisie. Les propriétés et caractéristiques de chaque type d'équation sont assez différentes. Dans ce cours, nous nous concentrerons sur les équations elliptiques.

Exercice 1.4 : Soit f une fonction de $L^1(]0,1[)$. On considère l'équation

$$\left\{\begin{array}{rcl} u'' & = & f \ \text{ sur }]0,1[\\ u'(0) & = & a \\ u'(1) & = & b \end{array}\right.$$

A quelle condition sur a et b, cette équation admet-elle une solution ?
Montrer de même que si Ω est un domaine régulier de $\mathbb{R}^n$, f une fonction de $L^1(\Omega)$ et g une fonction de $L^1(\partial\Omega)$, il y a une condition nécessaire portant sur f et g pour que le problème avec condition au bord de Neumann :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \Delta u & = & f \ \text{ dans } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} & = & g \ \text{ sur } \partial\Omega \end{array}\right.$$

possède au moins une solution. Vérifier que s'il en possède une, alors il y a une infinité de solutions.

Exercice 1.5 : On considère l'équation différentielle :

$$\left\{\begin{array}{rcl} u''+u & = & 1 \ \text{ dans }]0,\pi[\\ u(0) & = & a \\ u(\pi) & = & b \end{array}\right. \tag{1.5}$$

Vérifier, en résolvant l'équation explicitement, que pour qu'il y ait une solution à (1.5), il faut qu'il y ait une relation entre a et b (Notez la différence avec des données du type conditions initiales $u(0)=a$ et $u'(0)=b$ pour lesquelles il y a toujours une solution par le théorème de Cauchy).

1.3 Résolution explicite par la séparation des variables

1.3.1 Une équation de Laplace sur un rectangle

Considérons dans ce paragraphe le rectangle $R = [0, L] \times [0, l]$ et donnons nous une fonction f continue et définie sur ∂R. On veut résoudre ici l'équation aux dérivées partielles :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \Delta u & = & 0 \ \text{ dans } R \\ u & = & f \ \text{ sur } \partial R \end{array} \right. \tag{1.6}$$

La géométrie très particulière du domaine (qui s'écrit comme un produit) et la forme particulièrement simple de l'équation va nous permettre de donner une solution explicite (sous forme de série) de l'équation (1.6), mais il faut bien être conscient que ce type de situation est tout à fait exceptionnel (deux autres exemples seront néanmoins donnés ci-dessous) et que la règle générale est qu'une edp ne peut pas se résoudre de façon explicite, mais seulement de façon numérique (méthode des éléments finis par exemple).
Commençons tout d'abord à rechercher les fonctions harmoniques dans $\mathbb{R}^2$ qui sont à variables séparées, c'est-à-dire qui s'écrivent sous la forme $u(x, y) = v(x)w(y)$ (cette recherche nous est suggérée par la forme du domaine R qui lui-même s'écrit comme un produit). Puisque

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = v''(x)w(y) + v(x)w''(y) = 0$$

on en tire :

$$\frac{v''(x)}{v(x)} = -\frac{w''(y)}{w(y)} \tag{1.7}$$

Mais le premier membre de cette équation (1.7) n'est fonction que de x, tandis que le deuxième membre n'est fonction que de y. Les deux variables x et y étant bien entendu indépendantes, ceci n'est possible que si les deux membres de l'équation (1.7) sont égaux à une constante, c'est-à-dire qu'il existe λ tel que :

$$\frac{v''(x)}{v(x)} = -\frac{w''(y)}{w(y)} = \lambda.$$

On aboutit donc à deux équations différentielles ordinaires très classiques :

$$v''(x) - \lambda v(x) = 0 \ \text{ et } \ w''(y) + \lambda w(y) = 0$$

qu'on résout, en discutant suivant le signe de λ. On obtient donc en revenant à u :

$$u(x, y) = (a\cos(\omega x) + b\sin(\omega x))(c\cosh(\omega y) + \sinh(\omega y)) \tag{1.8a}$$

ou

$$u(x, y) = (a\cosh(\omega x) + b\sinh(\omega x))(c\cos(\omega y) + \sin(\omega y)) \tag{1.8b}$$

ou enfin

(1.8c). $$u(x, y) = (ax + b)(cy + d)$$

Les fonctions qui apparaissent ci-dessus sont donc toutes les fonctions harmoniques dans le plan s'écrivant comme le produit d'une fonction de x par une fonction de y. C'est parmi ces fonctions et leurs combinaisons que nous allons rechercher la solution de (1.6). Pour celà, commençons par décomposer le problème en quatre sous-problèmes. Notons f_i la restriction de f au i-ème côté du rectangle, ainsi f_1 est la restriction de f au côté $[0, L] \times \{0\}$. Par linéarité la résolution de (1.6) peut se ramener à la résolution des quatre systèmes :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \Delta u_i & = & 0 \ \text{ dans } R \\ u_i & = & f_i \ \text{ sur le ième côté} \\ u_i & = & 0 \ \text{ sur les autres côtés} \end{array} \right. \tag{1.9}$$

la solution de (1.6) s'obtenant alors par $u = u_1 + u_2 + u_3 + u_4$ (c'est ce que les physiciens appellent le principe de superposition).
Considérons donc, pour fixer les idées, le premier de ces systèmes, celui relatif à u_1 et recherchons parmi la liste de fonctions harmoniques données ci-dessus en (1.8), celles qui s'annulent sur les côtés verticaux du rectangle. On doit donc avoir

$$u(0, y) = u(L, y) = 0 \qquad \forall y \in [0, l]$$

Or, les fonctions cosh et sinh étant linéairement indépendantes, de même que les fonctions cos et sin, on se rend compte que cette double égalité n'est possible que dans le cas où $u(x, y)$ est de la forme (s'en persuader en détaillant les calculs !) :

$$u(x, y) = \sin(\frac{n\pi x}{L})(a \cosh(\frac{n\pi y}{L}) + b \sinh(\frac{n\pi y}{L})$$

où n est un entier, et a et b des réels (dépendant éventuellement de n).
Développons à présent la fonction f_1 en série de Fourier de sinus sur l'intervalle $[0, L]$ (c'est toujours possible puisqu'on peut prolonger la fonction f_1 par imparité sur $[-L, 0]$) :

$$f_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \sin(\frac{n\pi x}{L}) \qquad \text{avec} \quad \alpha_n = \frac{2}{L} \int_0^L f_1(x) \sin(\frac{n\pi x}{L}) dx$$

En explicitant alors la condition au bord dans (1.9) : $u(x, 0) = f_1(x)$ on se rend compte que cette relation sera vérifiée si on prend pour fonction u la somme de la série (sous réserve de convergence) :

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin(\frac{n\pi x}{L})(\alpha_n \cosh(\frac{n\pi y}{L}) + b_n \sinh(\frac{n\pi y}{L})) \tag{1.10}$$

où les constantes b_n restent à fixer grâce à la dernière condition au bord

$$u(x, l) = 0 \qquad \forall x \in [0, L].$$

En remplaçant dans l'expression ci-dessus, on obtient :

$$b_n = -\alpha_n \frac{\cosh(n\pi l/L)}{\sinh(n\pi l/L)}.$$

Le calcul effectué ci-dessus reste formel et il convient bien entendu d'étudier a posteriori la convergence de la série définissant u (cf exercice 6).Il n'empêche que nous avons obtenu ici une expression explicite de la solution, ce qui est, je le répète, relativement exceptionnel.

Exercice 1.6 : Donner des conditions suffisantes sur α_n pour que la série (1.10) soit uniformément convergente.

1.3.2 L'équation de Poisson sur le disque

On se place ici sur le disque unité de $\mathbb{R}^2$ qu'on notera D, de bord C et on se donne une fonction f continue sur C. On veut résoudre l'équation de Laplace (aussi appelée équation de Poisson dans ce cas) :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \Delta u & = & 0 \text{ dans } D \\ u & = & f \text{ sur } C \end{array} \right. \tag{1.11}$$

L'emploi des coordonnées cartésiennes (x, y) serait maladroit ici, puisque le disque unité ne s'exprime pas particulièrement simplement dans ce système de coordonnées. En revanche, en coordonnées polaires (r, θ), le disque unité s'écrit comme le produit cartésien $[0, 1] \times [0, 2\pi]$. Il est donc justifié de rechercher des solutions de (1.11) sous forme séparée : $u(r, \theta) = \phi(r)\psi(\theta)$.
L'expression du Laplacien en coordonnées polaires étant (cf exercice 2) :

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}$$

en remplaçant u par $\phi\psi$, on obtient :

$$\phi''(r)\psi(\theta) + \frac{1}{r}\phi'(r)\psi(\theta) + \frac{1}{r^2}\phi(r)\psi''(\theta) = 0$$

d'où, en séparant les fonctions de r des fonctions de θ :

$$\frac{\phi''(r) + \frac{1}{r}\phi'(r)}{\frac{1}{r^2}\phi(r)} = -\frac{\psi''(\theta)}{\psi(\theta)} = \lambda$$

où λ est une constante et ce par le même raisonnement que ci-dessus.
Dans le cas présent, la fonction ψ étant fonction de l'angle θ doit être périodique de période 2π. Il en résulte que la constante λ est nécessairement positive et égale à n^2 et donc que la fonction ψ est du type :

$$\psi(\theta) = a\cos(n\theta) + b\sin(n\theta)$$

où a et b sont des réels dépendant de n. L'équation différentielle ordinaire dont doit être solution la fonction ϕ s'écrit donc :

$$\phi''(r) + \frac{1}{r}\phi'(r) - n^2\frac{1}{r^2}\phi(r) = 0$$

Il est facile de vérifier que cette équation admet comme solutions linéairement indépendantes r^n et r^{-n}. Comme on recherche une solution définie en 0, seule la fonction r^n convient et les fonctions harmoniques s'écrivant comme produit d'une fonction de r par une fonction de θ sont donc de la forme :

$$u(r,\theta) = r^n(a\cos(n\theta) + b\sin(n\theta)). \tag{1.12}$$

Nous voulons maintenant que la condition au bord $u(1,\theta) = f(\theta)$ soit réalisée. Développons, là encore la fonction f en série de Fourier :

$$f(\theta) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos(n\theta) + b_n\sin(n\theta)$$

où les coefficients de Fourier a_n et b_n sont donnés par :

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)dt\ ,\ \ a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos(nt)dt \text{ et } b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sin(nt)dt$$

Par identification avec la condition au bord, on obtient donc que la fonction

$$u(r,\theta) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n(a_n\cos(n\theta) + b_n\sin(n\theta)) \tag{1.13}$$

est solution du problème (1.11).
Par ailleurs, les coefficients de Fourier étant bornés (ils tendent même vers 0 à l'infini par le théorème de Riemann-Lebesgue), il est facile de vérifier que la série définissant u converge uniformément sur tout compact de D.
Utilisons maintenant l'expression des coefficients de Fourier rappelée plus haut pour obtenir une autre expression de la solution u. Par interversion de la série et de l'intégrale (car la série converge uniformément sur tout cercle intérieur), on a :

$$u(r,\theta) = \tfrac{1}{2\pi}\textstyle\int_0^{2\pi} f(t)dt + \tfrac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)(\sum_{n=1}^{\infty} r^n(\cos(n\theta)\cos(nt) + \sin(n\theta)\sin(nt)))dt =$$

$$= \tfrac{1}{2\pi}\textstyle\int_0^{2\pi} f(t)dt + \tfrac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)(\sum_{n=1}^{\infty} r^n(\cos(n(\theta - t))))dt$$

Or il est facile de vérifier (se ramener à une série géométrique en passant en nombre complexe) que

$$\sum_{n=1}^{\infty} r^n\cos(n\tau) = \frac{r\cos(\tau) - r^2}{1 - 2r\cos(\tau) + r^2}$$

et donc u peut s'écrire :

$$u(r,\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)dt + \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\frac{r\cos(t-\theta) - r^2}{1 - 2r\cos(t-\theta) + r^2}\,dt$$

soit

$$u(r,\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos(t-\theta) + r^2}\,dt.$$

Cette formule est connue sous le nom de formule de Poisson, c'est donc une représentation intégrale de la solution du problème de Poisson (1.11) à l'intérieur du disque en fonction de la donnée au bord.

1.3.3 Une équation de Laplace sur un cylindre

Considérons dans ce paragraphe un cylindre Ω de $\mathbb{R}^3$ de base circulaire de rayon 1 et de hauteur h. Donnons nous une fonction $f(r,\theta)$ définie sur le disque unité et cherchons à résoudre l'équation aux dérivées partielles :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \Delta u & = & 0 \text{ dans } \Omega \\ u & = & f \text{ sur la base inférieure} \\ u & = & 0 \text{ sur les autres côtés} \end{array}\right. \tag{1.14}$$

Le laplacien en coordonnées cylindriques s'écrivant

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

recherchons là encore des solutions sous forme séparée $u(r,\theta,z) = \phi(r,\theta)\rho(z)$. En remplaçant dans l'expression ci-dessus on obtient :

$$(\frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2})\rho(z) + \phi(r,\theta)\rho''(z) = 0$$

ce qui implique par un raisonnement auquel vous êtes maintenant habitués :

$$\frac{\Delta\phi}{\phi} = -\frac{\rho''(z)}{\rho(z)} = \lambda.$$

Comme, par ailleurs u doit s'annuler sur les bords verticaux du cylindre, on voit donc qu'on est naturellement conduit à étudier et résoudre le problème :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \Delta\phi & = & \lambda\phi \text{ dans } D \\ \phi & = & 0 \text{ sur } \partial D \end{array}\right. \tag{1.15}$$

Ce problème s'appelle un problème de valeurs propres posé sur le disque unité D (par analogie avec la situation en dimension finie). Il est clair que la fonction nulle est trivialement solution de (1.15) et il s'agit donc de rechercher des valeurs de λ pour lesquelles ce problème (1.15) admet d'autres solutions. Nous montrerons plus tard qu'il existe en général (c'est-à-dire pour un domaine Ω quelconque) une suite de valeurs λ_n tendant vers $-\infty$ qui répondent à la question. Contentons nous ici de vérifier que si une telle valeur λ existe, elle est nécessairement négative. Pour celà, multiplions l'équation (1.15) par ϕ et intégrons sur D. Par la formule de Green (voir la première section), on a :

$$\lambda \int_D \phi^2(x)dx = \int_D \phi(x)\Delta\phi(x)dx = \int_{\partial D} \phi\frac{\partial \phi}{\partial n}d\sigma - \int_D |\nabla\phi(x)|^2 dx$$

et, puisque ϕ s'annule sur le bord de D :

$$\lambda = -\frac{\int_D |\nabla\phi(x)|^2 dx}{\int_D \phi^2(x)dx}$$

ce qui prouve le résultat annoncé.
Posant alors $\lambda = -\omega^2$, on constate que nécessairement, la fonction $\rho(z)$ est de la forme

$$\rho(z) = a\cosh(\omega z) + b\sinh(\omega z)$$

Maintenant le fait que u s'annule sur le bord supérieur du cylindre entraîne que

$$\rho(1) = a\cosh(\omega) + b\sinh(\omega) = 0$$

ce qui fournit une relation entre a,b et ω.
Intéressons nous maintenant à la fonction ϕ. Cherchons à résoudre le problème aux valeurs propres (1.15), de nouveau par une méthode de variables séparables. Posons à cet effet $\phi(r,\theta) = v(r)w(\theta)$ et remplaçons dans l'équation. On obtient :

$$v''(r)w(\theta) + \frac{1}{r}v'(r)w(\theta) + \frac{1}{r^2}v(r)w''(\theta) = -\omega^2 v(r)w(\theta)$$

ce qui donne, en séparant les fonctions de r et de θ, l'existence d'une nouvelle constante μ telle que :

$$\frac{v''(r) + \frac{1}{r}v'(r) + \omega^2 v(r)}{\frac{1}{r^2}v(r)} = -\frac{w''(\theta)}{w(\theta)} = \mu.$$

Pour les mêmes raisons que précedemment, il en résulte que μ est le carré d'un entier $\mu = n^2$ et que la fonction w est de la forme :

$$w(\theta) = a\cos(n\theta) + b\sin(n\theta).$$

Il reste à déterminer v. L'équation différentielle satisfaite par v est donc :

$$v''(r) + \frac{1}{r}v'(r) + (\omega^2 - \frac{n^2}{r^2})v(r) = 0$$

qu'on peut ramener, par un simple changement de variable :$v(r) = g(\omega r)$ (et on posera $x = \omega r$) à la classique équation différentielle dite de Bessel :

$$g''(x) + \frac{1}{x}g'(x) + (1 - \frac{n^2}{x^2})g(x) = 0$$

dont les solutions sont les fonctions de Bessel J_n (je renvoie au livre de Laurent Schwartz "Méthodes Mathématiques pour les Sciences Physiques" pour plus de renseignements sur les fonctions de Bessel qui sont une famille de fonctions spéciales très utilisées en physique). Ainsi v est donc de la forme $v(r) = J_n(\omega r)$. Exprimons maintenant le fait que u doit s'annuler sur les bords latéraux du cylindre. Celà n'est clairement possible que si $v(1) = J_n(\omega) = 0$. On en déduit donc que ω doit être une racine de la fonction de Bessel J_n. Je ne continue pas plus loin la résolution de l'équation (1.15). Il faudrait pour pouvoir conclure développer la fonction f en série de fonctions de Bessel et fonctions trigonométriques, ce qui est possible mais nous emmènerait par trop en dehors du cadre de ce cours. Mon objectif en donnant ce dernier exemple était de montrer, d'une part qu'une méthode de séparation des variables pouvait rapidement conduire à un problème de valeurs propres, d'autre part qu'on pouvait aussi rencontrer assez naturellement des fonctions dites spéciales.

Exercice 1.7 : Résoudre sur le carré unité K de $\mathbb{R}^2$ l'équation :

$$\left\{\begin{array}{rcl} -\Delta u & = & 1 \text{ dans } K \\ u & = & 0 \text{ sur } \partial K \end{array}\right.$$

(on pourra se ramener au cas étudié ci-dessus par soustraction).

Exercice 1.8 : Résoudre sur le disque unité D de $\mathbb{R}^2$ l'équation :

$$\begin{cases} -\Delta u &= 1 \ \text{ dans } D \\ \frac{\partial u}{\partial n} &= f \ \text{ sur } \partial D \end{cases}$$

où f est une fonction donnée.

Chapitre 2

Espaces de Sobolev

2.1 Introduction

On a vu, au premier semestre de la première année, les distributions. L'une des principales applications de cette théorie est de donner un cadre fonctionnel puissant et rigoureux pour étudier les équations aux dérivées partielles. Nous allons reprendre et compléter ici le chapitre 5 du poly de Distributions consacré aux espaces de Sobolev.

2.2 Définitions et premières propriétés des espaces de Sobolev

2.2.1 Définition des espaces de Sobolev

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$. On définit l'espace de Sobolev $H^1(\Omega)$ comme étant l'espace des fonctions de $L^2(\Omega)$ dont toutes les dérivées premières (au sens des distributions) sont dans $L^2(\Omega)$:

$$H^1(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega) / \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega) \text{ pour } i = 1, \dots, N\}.$$

On le munit de la norme :

$$\|u\|_{H^1} := (\int_\Omega |u(x)|^2 \, dx \; + \; \sum_{i=1}^N \int_\Omega |\frac{\partial u}{\partial x_i}(x)|^2 \, dx)^{1/2}.$$

Il faut donc bien comprendre que dire qu'une suite u_n converge vers u dans $H^1(\Omega)$ signifie que u_n converge vers u dans $L^2(\Omega)$ et que, pour tout $i = 1, \dots, N$, $\frac{\partial u_n}{\partial x_i}$ converge vers $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ dans $L^2(\Omega)$.
Remarquons que la norme ci-dessus dérive d'un produit scalaire qu'on notera $(u, v)_{H^1(\Omega)}$ et qui est donné par :

$$(u, v)_{H^1} := \int_\Omega u(x)v(x) \, dx \; + \; \sum_{i=1}^N \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} \, dx.$$

On a alors :

Proposition 2.0.1 *L'espace $H^1(\Omega)$ muni de $\|.\|$ est un espace de Hilbert.*

Il arrive, en particulier dans les problèmes non linéaires, qu'au lieu de travailler avec $L^2(\Omega)$ il soit plus pratique de travailler avec l'espace $L^p(\Omega)$. L'espace de Sobolev correspondant se note alors $W^{1,p}(\Omega)$ et on montre que c'est un espace de Banach. Nous ne nous en servirons pas dans le cadre de ce cours.

Preuve de la proposition 2.0.1 : Il reste donc à prouver que $H^1(\Omega)$ muni de sa norme est complet. Soit u_n une suite de Cauchy dans $H^1(\Omega)$. Celà signifie que à la fois u_n est de Cauchy dans $L^2(\Omega)$ et que, pour tout $i = 1, \dots, N$, $\frac{\partial u_n}{\partial x_i}$ est de Cauchy dans $L^2(\Omega)$. Or $L^2(\Omega)$ est lui-même complet. Donc la suite u_n converge vers une fonction u de $L^2(\Omega)$ et chacune des suites $\frac{\partial u_n}{\partial x_i}$ converge également vers un élément qu'on notera v_i de $L^2(\Omega)$. Or $u_n \to u$ dans $L^2(\Omega)$ entraîne que $u_n \to u$ au sens des distributions. Mais la dérivation étant continue dans $\mathcal{D}'(\Omega)$, on en déduit que $\frac{\partial u}{\partial x_i} = v_i$ au sens des distributions, donc en tant que fonctions car elles sont toutes deux dans $L^2(\Omega)$. On a donc bien montré que u_n converge vers u dans $H^1(\Omega)$.

On définit maintenant, de manière plus générale les espaces de Sobolev $H^m(\Omega)$ où m est un entier, comme étant l'espace des fonctions de $L^2(\Omega)$ dont toutes les dérivées jusqu'à l'ordre m sont dans $L^2(\Omega)$:

$$H^m(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega)/D^\alpha u \in L^2(\Omega) \text{ pour tout } \alpha \text{ multi} - \text{indice d'ordre } \leq \ m\}.$$

On rappelle que si $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N)$ est un multi-indice (dont chaque composante est un entier), on appelle ordre de α le nombre $|\alpha| = \sum_{i=1}^N \alpha_i$, tandis que $D^\alpha u$ désigne la dérivée partielle

$$D^\alpha u = \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_N^{\alpha_N}}.$$

On le munit de la norme :

$$\|u\|_{H^m} := \left(\sum_{\alpha/|\alpha| \leq m} \int_\Omega |D^\alpha u(x)|^2 \, dx \right)^{1/2}.$$

On démontre exactement comme dans le cas $m = 1$ la proposition :

Proposition 2.0.2 *L'espace $H^m(\Omega)$ muni de $\|.\|$ est un espace de Hilbert.*

Exemple : la fonction $u(x) = x + |x|$ est dans $H^1(]-1, 1[)$ car sa dérivée est la fonction qui vaut 0 sur $]-1, 0[$ et 1 sur $]0, 1[$. En revanche, elle n'est pas dans $H^2(]-1, 1[)$ car sa dérivée seconde est égale à δ_0 (la mesure de Dirac à l'origine) qui n'est pas une fonction de $L^2(]-1, 1[)$.

Dans le cas où Ω est égal à $\mathbb{R}^N$, il est possible de définir l'espace de Sobolev en utilisant la transformée de Fourier. Cette alternative s'avèrera utile dans plusieurs situations (en particulier dans certaines démonstrations), c'est pourquoi je le précise ici :
si u est une fonction de $L^2(\mathbb{R}^N)$, on notera $\widehat{u}$ sa transformée de Fourier et on a alors

$$H^m(\mathbb{R}^N) = \{u \in L^2(\mathbb{R}^N) \text{ telle que } (1 + |\xi|^2)^{m/2} \widehat{u}(\xi) \in L^2(\mathbb{R}^N)\}$$

et de plus la norme $\|u\|_{H^m(R^N)}$ est équivalente à la norme définie par :

$$\|u\| = \left(\int_{R^N} (1+|\xi|^2)^m |\widehat{u}(\xi)|^2 \, d\xi \right)^{1/2}.$$

Remarquons que la définition précédente, contrairement au cas d'un ouvert Ω quelconque, ne fait pas intervenir le fait que m est un entier. Et en effet on définit les espaces de Sobolev $H^s(\mathbb{R}^N)$ par la formule précédente pour tout s réel.

Exercice 2.1 : Montrer l'équivalence entre les deux définitions données de $H^m(\mathbb{R}^N)$, ainsi que l'équivalence des normes.

Exercice 2.2 : 1) Soit $]a,b[$ un intervalle de $\mathbb{R}$ et φ une fonction de classe C^1 sur $[a,b]$. Montrer qu'il existe une constante C ne dépendant que de a et b telle que :

$$\forall t \in]a,b[, \; |\varphi(t)| \leq C(\|\varphi\|_{L^2} + \|\varphi'\|_{L^2})$$

En déduire que $H^1(]a,b[) \hookrightarrow L^\infty(]a,b[)$ et que l'injection est continue (on admettra la densité de $C^1(\mathbb{R})$ dans $H^1(]a,b[)$).
Choisir un exemple de fonction du type $u(r,\theta) = (\log r)^\alpha$, pour prouver que l'injection de $H^1(B)$ dans $L^\infty(B)$ (où B est la boule de centre O et de rayon $1/2$) est fausse en dimension deux.
2) Soit $\mathcal{B}$ un borné de $H^1(]a,b[)$, montrer qu'il existe une constante $C_{\mathcal{B}}$ ne dépendant que de $\mathcal{B}$, telle que :

$$\forall \varphi \in \mathcal{B} \;\; \forall t,t' \in]a,b[, \; |\varphi(t) - \varphi(t')| \leq C_{\mathcal{B}} |t-t'|^{1/2}$$

En déduire que l'injection de $H^1(]a,b[)$ dans $L^\infty(]a,b[)$ est compacte.

Exercice 2.3 : Montrer que :

$$u \in H^2(\mathbb{R}^N) \iff u \in L^2(\mathbb{R}^N) \text{ et } \Delta u \in L^2(\mathbb{R}^N)$$

et que l'application $u \longmapsto -\Delta u + \alpha u$ (où α est un réel positif) est un isomorphisme continu de $H^2(\mathbb{R}^N)$ sur $L^2(\mathbb{R}^N)$ (utiliser la transformée de Fourier).

2.2.2 Le sous-espace $H_0^m(\Omega)$:

On sait que pour un ouvert Ω quelconque, l'espace $\mathcal{D}(\Omega)$ des fonctions indéfiniment différentiables à support compact dans Ω est dense dans $L^2(\Omega)$.Il n'en est rien, en général pour les espaces $H^m(\Omega)$ (sauf essentiellement pour le cas $\Omega = \mathbb{R}^N$, voir plus loin). Pour s'en convaincre, considérons le cas d'un intervalle borné $]a,b[$ de $\mathbb{R}$ et choisissons la fonction exponentielle $f(x) = \exp(x)$ qui est bien évidemment dans l'espace de Sobolev $H^1(]a,b[)$. Pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{D}(]a,b[)$, on a :

$$(f,\varphi)_{H^1(]a,b[)} = \int_a^b f'(x)\varphi'(x)dx \; + \; \int_a^b f(x)\varphi(x)dx =$$
$$< f',\varphi' >_{\mathcal{D}'\times\mathcal{D}} + < f,\varphi >_{\mathcal{D}'\times\mathcal{D}} = - < f'',\varphi >_{\mathcal{D}'\times\mathcal{D}} + < f,\varphi >_{\mathcal{D}'\times\mathcal{D}} = 0$$

car, $\exp(x)'' = \exp(x)$! Il en résulte donc que la fonction f est orthogonale au sous-espace $\mathcal{D}(]a,b[)$ ce qui prouve que ce sous-espace ne peut pas être dense.

Définition 2.1 *On note $H_0^m(\Omega)$ l'adhérence (pour la norme $\|\,.\,\|_{H^m}$) de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $H^m(\Omega)$.*

$H_0^m(\Omega)$ est donc évidemment un sous-espace fermé de $H^m(\Omega)$. Dans le cas $m = 1$, par exemple, les fonctions de $H_0^1(\Omega)$ sont intuitivement les fonctions de $H^1(\Omega)$ qui s'annulent sur le bord de Ω. Nous allons préciser celà dans un instant, mais avant examinons le cas de $\Omega = \mathbb{R}^N$ qui est un peu particulier :

Proposition 2.0.3 *On a $H_0^m(\mathbb{R}^N) = H^m(\mathbb{R}^N)$ (c'est-à-dire que $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ est dense dans $H^m(\mathbb{R}^N)$).*

Démonstration On va le faire dans le cas $H^s(\mathbb{R}^N)$ car ça ne coûte pas plus cher :
On utilise la transformée de Fourier. Rappelons que $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ est dense dans l'espace des fonctions à décroissance rapide $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ et que $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ est évidemment inclus dans $H^s(\mathbb{R}^N)$ avec injection continue. Soit $u \in H^s(\mathbb{R}^N)$ et $\widehat{u}$ sa transformée de Fourier. On sait, par définition de $H^s(\mathbb{R}^N)$, que $(1+|\xi|^2)^{s/2}\widehat{u}(\xi) \in L^2(\mathbb{R}^N)$. Comme $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ est dense dans $L^2(\mathbb{R}^N)$, il existe une suite (φ_n) de fonctions de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ qui convergent dans $L^2(\mathbb{R}^N)$ vers $(1+|\xi|^2)^{s/2}\widehat{u}(\xi)$. Définissons la suite g_n de fonctions dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ par leurs transformées de Fourier :

$$\widehat{g_n}(\xi) = (1+|\xi|^2)^{-s/2}\varphi_n(\xi)$$

En effet, les fonctions $(1+|\xi|^2)^{-s/2}\varphi_n(\xi)$ sont dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ donc dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ et on sait que la transformée de Fourier est une bijection continue de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ dans lui-même, donc les fonctions g_n sont bien dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$. Maintenant, par construction $(1+|\xi|^2)^{s/2}\widehat{g_n}$ converge vers $(1+|\xi|^2)^{s/2}\widehat{u}$ dans $L^2(\mathbb{R}^N)$, c'est-à-dire que g_n tend vers u dans $H^s(\mathbb{R}^N)$. La proposition résulte alors de la remarque préliminaire sur la densité de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$.

Pour en revenir à la caractérisation des fonctions de $H_0^1(\Omega)$ comme étant celles qui s'annulent sur le bord, considérons tout d'abord le cas, plus simple, où la fonction est nulle sur tout un voisinage du bord :

Proposition 2.0.4 *Soit $u \in H^1(\Omega)$ avec le support de u compact dans Ω. Alors $u \in H_0^1(\Omega)$.*

En effet, si on utilise une suite régularisante ρ_ϵ, le produit de convolution $\rho_\epsilon * u$ est indéfiniment dérivable et, pour ϵ assez petit, a son support dans Ω. Il est facile de se convaincre alors que la suite $\rho_\epsilon * u$ (qui est donc dans $\mathcal{D}(\Omega)$) converge dans $H^1(\Omega)$ vers u.

Examinons maintenant le cas, plus fréquent, d'une fonction continue appartenant à $H_0^1(\Omega)$:

Proposition 2.0.5 *Soit Ω un ouvert borné de classe C^1 et soit $u \in H^1(\Omega) \cap \mathcal{C}(\bar{\Omega})$. Alors*

$$u \in H_0^1(\Omega) \iff u = 0 \text{ sur } \partial\Omega$$

La démonstration est un peu longue et technique, nous l'omettons ici.
Signalons maintenant, toujours sans démonstration (se reporter au livre de Brézis d'Analyse Fonctionnelle), une autre caractérisation de $H_0^1(\Omega)$.

Proposition 2.0.6 *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$. Pour toute fonction u définie sur Ω on désigne par $\tilde{u}$ le prolongement de u par 0 en dehors de Ω :*

$$\tilde{u}(x) = \begin{cases} u(x) & \text{si} \quad x \in \Omega \\ 0 & \text{si} \quad x \notin \Omega \end{cases}$$

Alors, si $u \in H_0^1(\Omega)$, la fonction $\tilde{u} \in H^1(\mathbb{R}^N)$.
Réciproquement, si l'on suppose de plus Ω de classe C^1 alors

$$\tilde{u} \in H^1(\mathbb{R}^N) \Longrightarrow u \in H_0^1(\Omega)$$

Nous donnerons plus loin au paragraphe 2.4, une dernière caractérisation de $H_0^1(\Omega)$ en terme de trace (les fonctions de $H_0^1(\Omega)$ seront les fonctions de $H^1(\Omega)$ dont la trace est nulle sur le bord de Ω) mais on comprend bien que toutes ces caractérisations veulent dire à peu près la même chose.

2.2.2.1 Les inégalités de Poincaré

Donnons à présent une inégalité, valable pour toutes les fonctions de $H_0^1(\Omega)$ qui s'avèrera fort utile dans la suite, en particulier dans la résolution de certaines e.d.p.

Proposition 2.0.7 (L'inégalité de Poincaré) *Soit Ω un ouvert borné dans une direction (cf ci-dessous). Alors il existe une constante C ne dépendant que de Ω telle que*

$$\forall u \in H_0^1(\Omega) \qquad \|u\|_{L^2} \leq C\|\nabla u\|_{L^2}.$$

Dire que Ω est borné dans une direction signifie qu'il est inclus dans une bande de l'espace $\mathbb{R}^N$, c'est-à-dire qu'il existe un vecteur unitaire ξ et un réel A tels que

$$\Omega \subset \{x \in \mathbb{R}^N / -A \leq x.\xi \leq A\}.$$

Démonstration de la proposition : Dans la démonstration qui suit, on peut supposer, quitte à changer de repère, que cette bande est "horizontale", c'est-à-dire que Ω est borné dans la direction de x_N :
$\Omega \subset \Omega' \times [-A, A]$ où Ω' est un ouvert de $\mathbb{R}^{N-1}$.
On fait un raisonnement par densité en prenant tout d'abord $u \in \mathcal{D}(\Omega)$. Comme u est nul sur le bord de la bande, on a

$$u(x_1, \ldots, x_N) = \int_{-A}^{x_N} \frac{\partial u}{\partial x_N}(x_1, \ldots, x_{N-1}, t)\, dt$$

et donc, en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwartz :

$$|u(x_1, \ldots, x_N)|^2 \leq \int_{-A}^{x_N} |\frac{\partial u}{\partial x_N}(x', t)|^2 dt \int_{-A}^{x_N} 1^2\, dt$$

$$\leq 2A \int_{-A}^{A} |\frac{\partial u}{\partial x_N}(x', t)|^2 dt$$

Intégrons cette dernière relation sur Ω' :

$$\int_{\Omega'} |u(x)|^2 \, dx' \leq 2A \int_{-A}^{A} \int_{\Omega'} |\frac{\partial u}{\partial x_N}(x', t)|^2 dt dx'$$

d'où

$$\int_{\Omega} |u(x)|^2 \, dx \leq \int_{-A}^{A} \int_{\Omega'} |u(x)|^2 \, dx' dx_N$$

$$\leq 4A^2 \int_{-A}^{A} \int_{\Omega'} |\frac{\partial u}{\partial x_N}(x', t)|^2 dt dx' \; \leq \; 4A^2 \int_{\Omega} |\nabla u(x)|^2 \, dx$$

l'inégalité annoncée est donc vérifiée par toute fonction u de $\mathcal{D}(\Omega)$ et donc, comme une fonction de $H_0^1(\Omega)$ est limite d'une suite de fonctions de $\mathcal{D}(\Omega)$, on en déduit le résultat pour toute fonction de $H_0^1(\Omega)$ par passage à la limite.

Corollaire 2.0.1 *L'expression*

$$|u|_1 := \left(\sum_{i=1}^{N} \int_{\Omega} |\frac{\partial u}{\partial x_i}|^2 \, dx \right)^{1/2}$$

est une norme sur $H_0^1(\Omega)$ équivalente à la norme induite par celle de $H^1(\Omega)$

Sur $H^1(\Omega)$ l'inégalité de Poincaré est fausse (trouver un contre-exemple !), il faut la remplacer par une inégalité plus générale, appelée inégalité de Poincaré-Wirtinger qui nécessite des hypothèses un peu plus fortes sur l'ouvert Ω et qui fait intervenir la moyenne de la fonction :

Proposition 2.0.8 (Inégalité de Poincaré-Wirtinger) *Soit Ω un ouvert connexe borné et lipschitzien. Alors il existe une constante C qui ne dépend que de Ω telle que*

$$\forall u \in H^1(\Omega) \qquad \|u - \bar{u}\|_{L^2} \leq C \|\nabla u\|_{L^2} \quad \text{où } \bar{u} = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} u(x) \, dx$$

La démonstration de cette proposition sera faite en exercice un peu plus tard.

Exercice 2.4 : Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$. Caractériser les éléments de l'orthogonal de $H_0^1(\Omega)$ dans $H^1(\Omega)$ comme les solutions d'une équation aux dérivées partielles posée sur Ω. En déduire que cet orthogonal est de dimension finie pour $N = 1$ et de dimension infinie pour $N \geq 2$ et Ω borné.

Exercice 2.5 : On demande si l'inégalité de Poincaré est vraie dans chacun des espaces de Hilbert suivants :
a) $V_1 = H_0^1(]0, +\infty[)$
b) $V_2 = \{u \in H^1(]0, 1[); u(1/2) = 0\}$

2.3 Injections continues et compactes

2.3.1 Injections continues

On a vu dans l'exercice **2.2**, qu'en dimension un, l'espace de Sobolev $H^1(I)$ s'injectait de façon continue dans $L^\infty(I)$. Ce résultat est très particulier à la dimension 1, comme le montre l'exemple de la fonction $u(r,\theta) = \log r$ donné dans le même exercice. Néanmoins l'idée générale que nous allons développer dans ce paragraphe est que, en dimension N, on a effectivement une inclusion $H^m(\Omega) \subset L^\infty(\Omega)$ pourvu qu'on prenne m assez grand. Commençons par le cas $\Omega = \mathbb{R}^N$.
Nous noterons, pour k entier

$$\mathcal{B}_k(\mathbb{R}^N) := \{u \in \mathcal{C}^k(\mathbb{R}^N);\ \lim_{|x|\to\infty} |D^\alpha u(x)| = 0\ \ \forall \alpha, |\alpha|\ \leq k\}$$

Proposition 2.0.9 *Soient $s \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{N}$ vérifiant $s > \frac{N}{2} + k$. On a alors :*

$$H^s(\mathbb{R}^N) \subset \mathcal{B}_k(\mathbb{R}^N)$$

avec injection continue.

Remarque : L'exemple rappelé ci-dessus, en dimension 2, montre que la condition $s > \frac{N}{2} + k$ ne peut pas être améliorée $(k = 0, s = 1)$.

Ce théorème signifie donc, en particulier, que dès que $s > \frac{N}{2}$, les fonctions de $H^s(\mathbb{R}^N)$ sont continues (ou plus exactement ont, dans leur classe, un représentant continu).

Démonstration :
On prouve d'abord le résultat pour $k = 0$. Soit $u \in H^s(\mathbb{R}^N)$, alors si $\widehat{u}$ désigne, comme d'habitude, la transformée de Fourier de u on a :

$$(2.1)\quad \int_{\mathbb{R}^N} |\widehat{u}(\xi)| d\xi = \int_{\mathbb{R}^N} (1+|\xi|^2)^{s/2}(1+|\xi|^2)^{-s/2}|\widehat{u}(\xi)| d\xi \leq \|u\|_s \Big(\int_{\mathbb{R}^N} \frac{d\xi}{(1+|\xi|^2)^s}\Big)^{1/2}.$$

Comme $2s > N$ cette dernière intégrale est convergente et donc $\widehat{u} \in L^1(\mathbb{R}^N)$. Or dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$,
$u = \mathcal{F}^{-1}(\widehat{u})$ et donc, d'après les résultats classiques sur les transformées de Fourier $u \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^N)$.
De plus, puisque $\widehat{u} \in L^1(\mathbb{R}^N)$, $u(x)$ est donnée par :

$$u(x) = \frac{1}{(2\pi)^N} \int_{\mathbb{R}^N} \widehat{u}(\xi)\, e^{i\xi.x}\, d\xi$$

et donc u vérifie l'inégalité

$$\|u\|_{\mathcal{B}_0} \stackrel{def}{=} \sup_{x\in\mathbb{R}^N} |u(x)| \leq \frac{1}{(2\pi)^N} \int_{\mathbb{R}^N} |\widehat{u}(\xi)|\, d\xi \leq \frac{C}{(2\pi)^N} \|u\|_s$$

en utilisant (2.1) avec

$$C = \Big(\int_{\mathbb{R}^N} \frac{d\xi}{(1+|\xi|^2)^s}\Big)^{1/2}$$

ce qui entraîne que l'injection $H^s \hookrightarrow \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^N)$ pour $s > N/2$ est continue.
Le cas général s'en déduit aisément en utilisant le fait que

$$u \in H^s(\mathbb{R}^N) \iff D^\alpha u \in H^{s-|\alpha|}(\mathbb{R}^N) \subset H^k(\mathbb{R}^N) \ \ \forall |\alpha| \leq s.$$

On en déduit en particulier :

Corollaire 2.0.2 *Les fonctions qui appartiennent à l'espace $H^s(\mathbb{R}^N)$ pour tout $s \in \mathbb{R}$ sont indéfiniment différentiables, c'est-à-dire :*

$$\bigcap_{s \in \mathbb{R}} H^s(\mathbb{R}^N) \subset \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^N)$$

La proposition 2.0.9 signifie donc, en particulier, que pour que $H^s(\mathbb{R}^N)$ s'injecte dans l'espace des fonctions continues il faut que s soit assez grand. Quand $s \leq N/2$, $H^s(\mathbb{R}^N)$ ne s'injecte plus dans $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}^N)$ mais néanmoins dans un espace L^q avec q plus grand que 2. C'est l'objet du théorème suivant que nous admettrons.

Théorème 2.1 (Sobolev) *Soient m un entier alors on a*

$$(i) \qquad \text{si } \ m < \frac{N}{2}, \ \text{ alors } \ H^m(\mathbb{R}^N) \subset L^{2^*}(\mathbb{R}^N) \text{ où } 2^* = \frac{2N}{N-2m}$$

$$(ii) \qquad \text{si } \ m = \frac{N}{2}, \ \text{ alors } \ H^m(\mathbb{R}^N) \subset L^q(\mathbb{R}^N) \ \ \forall q \in [2, \infty[$$

$$(iii) \qquad \text{si } \ m > \frac{N}{2}, \ \text{ alors } \ H^m(\mathbb{R}^N) \subset L^\infty(\mathbb{R}^N)$$

avec dans chacun des cas une injection continue.

Tous les résultats précédents énoncés dans le cas de $\mathbb{R}^N$, s'étendent pour un ouvert Ω plus général pourvu qu'on suppose un minimum de régularité :

Corollaire 2.1.1 *Soit Ω un ouvert lipschitzien de $\mathbb{R}^N$ avec $\partial\Omega$ borné, m un entier ≥ 1. Alors on a*

$$(i) \qquad \text{si } \ m < \frac{N}{2}, \ \text{ alors } \ H^m(\Omega) \subset L^{2^*}(\Omega) \text{ où } 2^* = \frac{2N}{N-2m}$$

$$(ii) \qquad \text{si } \ m = \frac{N}{2}, \ \text{ alors } \ H^m(\Omega) \subset L^q(\Omega) \ \ \forall q \in [2, \infty[$$

$$(iii) \qquad \text{si } \ m > \frac{N}{2}, \ \text{ alors } \ H^m(\Omega) \subset L^\infty(\Omega)$$

avec dans chacun des cas une injection continue.

Exercice 2.6 : Montrer que si $u \in H^1(\mathbb{R})$, alors $\lim_{|x| \to \infty} u(x) = 0$.

Exercice 2.7 : On note B_R la boule de centre 0 et de rayon R et on note r la distance à l'origine.
1) On suppose ici que $2 < N$ et $q > \frac{2N}{N-2}$ et on considère la fonction $u(x) = r^\lambda$. Choisir λ pour que u soit dans $H^1(B_R)$ mais pas dans $L^q(B_R)$.
2) On se place maintenant dans le cas limite $N = 2$ et on considère la fonction $u(x) = \log(\log 4R/r)$. Vérifier que $u \in H^1(B_R)$ alors que, évidemment $u \notin L^\infty$.

2.3.2 Injections compactes

Il est très important, en analyse, de disposer de résultats de compacité pour prouver des théorèmes d'existence par exemple. Un cas particulier important de tels résultats de compacité est quand on sait qu'une application linéaire d'un espace dans un autre est compacte, c'est-à-dire que l'image de tout borné est relativement compacte (pour la topologie de l'espace d'arrivée). En particulier, de toute suite bornée dans l'espace de départ on pourra extraire une sous-suite convergente-via l'application compacte-dans l'espace d'arrivée. Ainsi, pour obtenir un théorème d'existence d'une solution pour un problème donné (par exemple un problème de minimisation ou une certaine e.d.p.) quand on disposera d'une telle application compacte T, mettons d'un espace E dans un espace F, il suffira bien souvent de prouver qu'une certaine suite (par exemple une suite minimisante dans un problème de minimisation) est bornée dans l'espace E, c'est ce qu'on appelle la technique des estimations a-priori.
Or la plupart des injections que nous avons vues dans le paragraphe précédent, à condition de se placer sur un ouvert borné et assez régulier sont effectivement des applications compactes (sauf un certain nombre de cas "limites" qui seront précisés). C'est ainsi que, comme nous l'avons vu dans l'exercice 2 de ce chapitre, en dimension 1, l'injection de $H^1(I)$ dans $L^\infty(I)$ (où I est un intervalle borné de $\mathbb{R}$) est compacte. Pour illustrer ce qui précède, je vais utiliser ce simple résultat pour montrer l'existence d'une solution dans un problème simple de minimum en dimension 1 :
considérons l'intervalle $I = [0,1]$ et le sous-ensemble de $H^1(I)$ défini par :

$$V = \{v \in H^1(I) \text{ telle que } v(0) = 0, v(\frac{1}{2}) = 1, v(1) = 0\}.$$

Notons que, puisque en dimension 1, les fonctions de H^1 sont continues, la définition ci-dessus a bien un sens et, de plus, à cause des conditions $v(0) = 0$ et $v(1) = 0$, V est en fait un sous-espace de $H^1_0(I)$.
Nous allons chercher à minimiser la fonctionnelle suivante sur l'espace V :

$$J(x) := \int_0^1 x'^2(t)\,dt + x^2(\frac{1}{4}) - x^2(\frac{3}{4}).$$

Vérifions tout d'abord que J est minorée sur V. Puisque $v(1) = 0$, on a, pour toute fonction x dans V :

$$x(\frac{3}{4}) = x(\frac{3}{4}) - x(1) = -\int_{3/4}^1 x'(t)\,dt$$

et donc, par l'inégalité de Cauchy-Schwartz

$$x^2(\frac{3}{4}) \le \int_{3/4}^1 1^2\,dt \int_{3/4}^1 x'^2(t)\,dt \le \frac{1}{4}\int_0^1 x'^2(t)\,dt$$

d'où l'on déduit immédiatement

$$\forall x \in V,\ J(x) \ge \frac{3}{4}\int_0^1 x'^2(t)\,dt \ge 0. \tag{2.2}$$

Remarquons que si l'on recherchait le minimum de J non pas sur V mais sur $H_0^1(I)$ tout entier, l'inégalité précédente serait évidemment toujours valable et elle montrerait clairement que le minimum de J sur $H_0^1(I)$ est atteint pour la fonction nulle.
La fonctionnelle J étant minorée, on peut donc poser

$$m := \inf_{x \in V} J(x)$$

et le problème est donc de montrer que cet inf est atteint, ce que nous allons faire par la méthode usuelle du calcul des variations consistant à travailler avec une suite minimisante (i.e. une suite x_n de fonctions de V telle que $J(x_n) \to m$ qui existe toujours par définition d'un inf), à extraire de cette suite une sous-suite qui converge (où l'on voit réapparaître la compacité) vers un élément qui sera le minimum cherché.
Soit, donc, x_n une telle suite minimisante, à partir d'un certain rang on a $J(x_n) \leq m+1$ et donc, grâce à l'inégalité (2.2)

$$\int_0^1 {x_n'}^2(t)\,dt \leq \frac{4}{3}(m+1)$$

ce qui implique, en utilisant l'inégalité de Poincaré, que la suite x_n est bornée dans $H^1(I)$. Maintenant on utilise tout d'abord la réflexivité de l'espace de Hilbert $H^1(I)$ pour extraire de la suite x_n une sous-suite **faiblement** convergente, dans $H^1(I)$ vers un élément qu'on notera x. De plus, par compacité de l'injection de $H^1(I)$ dans $L^\infty(I)$, on peut extraire une sous-suite de la suite x_n qui converge uniformément vers quelque chose, mais ce quelque chose ne peut être que x car il est clair que la convergence uniforme entraîne, par exemple, la convergence forte donc faible dans $L^2(I)$. Comme x_n converge uniformément vers x (et donc simplement) et que chaque x_n est dans V, il en résulte que x est, lui aussi, dans V. De plus, on a, à la fois

$$x_n(\frac{1}{4}) \to x(\frac{1}{4}),\ x_n(\frac{3}{4}) \to x(\frac{3}{4}) \text{ et } \int_0^1 x_n^2(t)\,dt \to \int_0^1 x^2(t)\,dt. \tag{2.3}$$

Enfin, on sait que la convergence faible diminue la norme, c'est-à-dire que

$$\|x\|_{H^1}^2 \leq \liminf \|x_n\|_{H^1}^2$$

ce qui entraîne, compte tenu de (2.3)

$$\int_0^1 x'^2(t)\,dt \leq \liminf \int_0^1 {x_n'}^2(t)\,dt. \tag{2.4}$$

Maintenant, en rassemblant (2.3) et (2.4) on obtient

$$J(x) \leq \liminf J(x_n) = m$$

ce qui prouve que x, qui est un élément de V, réalise le minimum de J sur V (remarquez qu'on ne sait pas si ce minimum est unique).

Exercice 2.8 : Calculer le (ou un) minimum de J sur V.
(Indication : écrire les équations d'Euler du problème, c'est-à-dire les conditions nécessaires d'optimalité, qu'on peut obtenir soit en dérivant, soit en écrivant que $J(x+\lambda y) \geq$

$J(x)$ pour tout λ et y tels que $x + \lambda y \in V$. On montrera, en particulier que le minimum est affine par morceaux).

Enonçons maintenant le théorème général de compacité, tout d'abord dans le cas de H_0^m.

Théorème 2.2 (Rellich) *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, m un entier supérieur ou égal à 0. On note 2^* le réel $\frac{2N}{N-2}$.*

(i) *L'injection de $H_0^{m+1}(\Omega)$ dans $H_0^m(\Omega)$ est compacte.*

(ii) *Si $N \geq 3$, alors pour tout q tel que $1 \leq q < 2^*$, l'injection de $H_0^1(\Omega)$ dans $L^q(\Omega)$ est compacte.*

(iii) *Si $N = 2$, alors pour tout $q < \infty$, l'injection de $H_0^1(\Omega)$ dans $L^q(\Omega)$ est compacte.*

(iv) *Si $N = 1$, alors l'injection de $H_0^1(\Omega)$ dans $L^\infty(\Omega)$ est compacte.*

Remarques :
- Si Ω n'est pas borné, les injections présentées ci-dessus ne sont plus compactes, vous en verrez deux exemples dans les exercices.
- Nous pouvons énoncer un théorème analogue dans le cas de $H^m(\Omega)$ avec Ω **lipschitzien**. Remplacez simplement dans l'énoncé ci-dessus $H_0^m(\Omega)$ par $H^m(\Omega)$.

Nous allons maintenant donner une première application de ces résultats de compacité qui va nous ramener à une notion qu'on avait déjà entrevue au chapitre 1.
Nous allons rechercher quelle peut être la meilleure constante dans l'inégalité de Poincaré démontrée dans le paragraphe précédent. On sait donc d'après la proposition 2.0.7 que si Ω est un ouvert borné, il existe une constante C telle que :

$$\forall u \in H_0^1(\Omega) \quad \int_\Omega u^2(x)\, dx \leq C \int_\Omega |\nabla u|^2(x)\, dx \tag{2.5}$$

et la question qu'on se pose ici est de déterminer, si possible, la meilleure constante C pour laquelle (2.5) a lieu. Il est clair que la meilleure constante C, notons la C^* est caractérisée par :

$$\frac{1}{C^*} = \inf\{\frac{\int_\Omega |\nabla u|^2(x)\, dx}{\int_\Omega u^2(x)\, dx},\ u \in H_0^1(\Omega),\ u \neq 0\}$$

ou, ce qui revient au même pour des raisons d'homogénéité :

$$\frac{1}{C^*} = \inf\{\int_\Omega |\nabla u|^2(x)\, dx,\ \int_\Omega u^2(x)\, dx = 1,\ u \in H_0^1(\Omega)\}. \tag{2.6}$$

Nous allons tout d'abord montrer, par un raisonnement analogue à celui fait au début de ce paragraphe, que l'inf ci-dessus est atteint, puis nous chercherons à le caractériser.
Notons λ_1 (pour des raisons qui apparaîtront plus tard) l'inf ci-dessus, et considérons une suite minimisante u_n, c'est-à-dire une suite de fonctions de $H_0^1(\Omega)$, de norme L^2 égale à 1 et telle que $\int_\Omega |\nabla u_n|^2(x)\, dx \to \lambda_1$. Il résulte de ce dernier point (et de l'inégalité de Poincaré) que la suite u_n est bornée dans $H_0^1(\Omega)$. On peut donc en extraire, par réflexivité de $H_0^1(\Omega)$, une sous-suite qui converge **faiblement** vers une fonction u de $H_0^1(\Omega)$. De plus, par compacité de l'injection de de $H_0^1(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$, on peut également extraire

de la suite u_n une sous-suite qui converge **fortement** dans $L^2(\Omega)$ vers un élément qui ne peut être que u (car chacune des convergences considérées entraîne la convergence au sens des distributions). On peut, bien évidemment, supposer que c'est la même sous-suite qui converge faiblement dans $H_0^1(\Omega)$ et fortement dans $L^2(\Omega)$ vers u et on notera toujours u_n cette sous-suite. Alors puisque chaque u_n est sur la sphère unité de $L^2(\Omega)$, il en est de même de u ($\int_\Omega u_n^2(x)\,dx \to \int_\Omega u^2(x)\,dx$) et comme on sait que

$$\|u\|_{H_0^1} \leq \liminf \|u_n\|_{H_0^1}$$

ceci entraîne

$$\int_\Omega |\nabla u|^2(x)\,dx \leq \liminf \int_\Omega |\nabla u_n|^2(x)\,dx$$

et il en résulte donc que u réalise le minimum dans (2.6).
Cherchons maintenant à caractériser u, ce qui donnera également la valeur de λ_1. Pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ et tout t réel, la fonction $u+t\varphi \in H_0^1(\Omega)$ et donc, par définition de λ_1 :

$$\lambda_1 = \frac{\int_\Omega |\nabla u|^2(x)\,dx}{\int_\Omega u^2(x)\,dx} \leq \frac{\int_\Omega |\nabla (u+t\varphi)|^2(x)\,dx}{\int_\Omega (u+t\varphi)^2(x)\,dx}$$

que l'on va réecrire

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega), \forall t \in \mathbb{R}, (\int_\Omega (u+t\varphi)^2(x)\,dx)\lambda_1 \leq \int_\Omega |\nabla (u+t\varphi)|^2(x)\,dx. \tag{2.7}$$

Développons (2.7), on obtient, compte-tenu de $(\int_\Omega u^2(x)\,dx)\lambda_1 = \int_\Omega |\nabla u|^2(x)\,dx$:

$$\lambda_1(2t\int_\Omega u\varphi(x)\,dx + t^2\int_\Omega \varphi^2(x)\,dx) \leq 2t\int_\Omega \nabla u.\nabla\varphi(x)\,dx + t^2\int_\Omega |\nabla\varphi(x)|^2\,dx. \tag{2.8}$$

Simplifions (2.8) par t positif, puis négatif puis dans chaque cas faisons tendre t vers 0, il vient :

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega),\ \lambda_1(\int_\Omega u\varphi(x)\,dx) = \int_\Omega \nabla u.\nabla\varphi(x)\,dx$$

ce qui peut s'écrire, au sens des distributions

$$\lambda_1 < u, \varphi >_{\mathcal{D}'\times\mathcal{D}} = \sum_{i=1}^N < \frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} >_{\mathcal{D}'\times\mathcal{D}} = < -\Delta u, \varphi >_{\mathcal{D}'\times\mathcal{D}}.$$

On a donc prouvé que u vérifiait, au sens des distributions, la relation

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda_1 u \text{ dans } \Omega \\ u \in H_0^1(\Omega) \end{cases}$$

ce qui montre que u est une fonction propre du laplacien (avec condition au bord de Dirichlet) associée à la valeur propre λ_1 (voir chapitre 1). De plus, λ_1 est nécessairement la plus petite valeur propre du laplacien, puisque si λ est une valeur propre quelconque et v une fonction propre associée, on a

$$-\Delta v = \lambda v \text{ dans } \Omega$$

et donc, en multipliant les deux membres de l'équation par v et en intégrant sur Ω, on obtient

$$-\int_\Omega \Delta v v\, dx = \lambda \int_\Omega v^2(x)\, dx$$

ce qui conduit, en utilisant la formule de Green et le fait que v s'annule sur le bord de Ω à

$$\int_\Omega |\nabla v(x)|^2\, dx = \lambda \int_\Omega v^2(x)\, dx$$

d'où, par définition de λ_1 comme un inf :

$$\lambda_1 \leq \frac{\int_\Omega |\nabla v(x)|^2\, dx}{\int_\Omega v^2(x)\, dx} = \lambda$$

ce qui prouve bien que λ_1 est nécessairement la plus petite valeur propre du laplacien. En conclusion, la meilleure constante dans l'inégalité de Poincaré pour un ouvert borné est **l'inverse de la plus petite valeur propre du laplacien avec condition au bord de Dirichlet**.

Exercice 2.9 : On veut démontrer dans cet exercice l'inégalité de Poincaré-Wirtinger (voir Proposition 2.0.8).
1) Vérifier qu'il suffit de prouver l'inégalité suivante

$$\int_\Omega u^2(x)\, dx \leq C \int_\Omega |\nabla u|^2(x)\, dx \quad \forall u \in H^1(\Omega) \text{ tel que } \int_\Omega u(x)\, dx = 0. \tag{2.9}$$

2) On veut prouver (2.9) par l'absurde. Montrer que si (2.9) n'est pas vrai, il existe une suite de fonctions u_n de $H^1(\Omega)$, telles que $\int_\Omega u_n(x)\, dx = 0$ et

$$\int_\Omega u_n^2(x)\, dx = 1 \text{ et } \int_\Omega |\nabla u_n|^2(x)\, dx \leq \frac{1}{n}.$$

En déduire qu'on peut extraire de la suite u_n une sous-suite qui converge faiblement dans $H^1(\Omega)$ et fortement dans $L^2(\Omega)$ vers une fonction u. En déduire qu'on aboutit à une contradiction.
3) Déterminer la meilleure constante dans l'inégalité (2.9). On prouvera, comme pour l'inégalité de Poincaré, que l'inf est atteint et on caractérisera celui-ci à l'aide d'un problème aux valeurs propres faisant intervenir le laplacien. Calculer la meilleure constante dans le cas $N = 1$ et $\Omega =]a, b[$.

Exercice 2.10 : 1) Soit (u_n) une suite d'éléments de $H^1(\mathbb{R}^N)$ et $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$.
Montrer que (u_n) converge faiblement vers u dans $H^1(\mathbb{R}^N)$ si et seulement si (u_n) converge vers u dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$ et $\|u_n\|_{H^1}$ est bornée.
2) Soit $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ avec support de u compact. On pose $u_n(x) = u(x + n)$; montrer que la suite u_n ainsi définie converge faiblement vers 0 dans $H^1(\mathbb{R}^N)$, mais que u_n ne converge pas (fortement) vers 0 dans $L^2(\mathbb{R}^N)$. En déduire que l'injection de $H^1(\mathbb{R}^N)$ dans $L^2(\mathbb{R}^N)$ n'est pas compacte (c'est ce qu'on appelle la perte de compacité à l'infini).

2.4 Trace d'une fonction

2.4.1 Introduction

Quand on travaille avec une fonction f d'un espace $L^2(\Omega)$ où Ω est un ouvert (régulier par exemple) de $\mathbb{R}^N$, on ne peut pas parler de "restriction" de f sur le bord de Ω ou sur toute autre variété K de dimension $N-1$ incluse dans Ω. En effet, les fonctions de $L^2(\Omega)$ étant définies à des ensembles de mesure nulle près, deux éléments de la même classe peuvent différer sur $\partial\Omega$ ou sur K qui sont des ensembles de mesure de Lebesgue nulle (au moins quand l'ouvert Ω est assez régulier). Ainsi, par exemple en dimension 1, si $\tilde{f}$ représente la classe de la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad 0 \le x \le \frac{1}{2} \\ 0 & \text{si} \quad \frac{1}{2} < x \le 1 \end{cases}$$

il n'est pas possible de donner un sens à $\tilde{f}(\frac{1}{2})$ puisque deux représentants distincts de la classe $\tilde{f}$ pourront prendre des valeurs distinctes en $1/2$.

Exercice 2.11 : Vérifier que $f(x) = \sin(\frac{1}{\sqrt[4]{x}})$ est une fonction de $L^2(]0,1[)$, mais qu'on ne peut pas donner de sens à la valeur de f sur le bord de $]0,1[$. Montrer également que $f \notin H^1(]0,1[)$.

Si on en reste à la dimension 1, on se rend compte que s'il n'est pas possible de donner un sens à $f(x_0)$ pour une fonction $f \in L^2(I)$ (où x_0 est un point de $\overline{I}$), il devient en revanche possible de le faire quand f est une fonction de l'espace de Sobolev $H^1(I)$ en raison de l'injection $H^1(I) \hookrightarrow C^0(\overline{I})$ (voir le corollaire 4 et la remarque qui le suit). C'est aussi ce que suggérait l'exercice ci-dessus. Ce phénomène est général : on va pouvoir définir la restriction-ou plus précisément la trace d'une fonction d'un espace de Sobolev $H^1(\Omega)$ sur le bord de Ω (ou plus généralement sur une variété régulière incluse dans $\overline{\Omega}$) et c'est ce à quoi nous allons nous attacher dans la fin de ce chapitre.

2.4.2 Cas du demi-espace

Nous allons d'abord traiter le cas particulier, mais fondamental, de

$$\Omega = \mathbb{R}^N_+ = \{x = (x', x_N), x' \in \mathbb{R}^{N-1}, x_N > 0\}.$$

Une fois qu'on aura bien établi la théorie dans ce cas, on comprend qu'on pourra l'étendre à des ouverts Ω plus généraux, mais suffisamment réguliers, en travaillant à l'aide de cartes locales.
Si $\Omega = \mathbb{R}^N_+$ le bord de Ω est $\partial\Omega = \{x = (x', x_N), x' \in \mathbb{R}^{N-1}, x_N = 0\}$ qu'on identifiera à $\mathbb{R}^{N-1}$. Maintenant, si u est une fonction régulière, mettons $u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$, alors il n'y a, bien sûr aucune difficulté à définir la trace de u sur $\mathbb{R}^{N-1}$ (il suffit même que u soit continue pour pouvoir le faire). On notera $\tau_0(u)$ cette restriction :

$$\forall u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N), \quad \tau_0(u)(x') = u(x', 0).$$

On va vérifier que cette trace $\tau_0(u)$ est un élément de l'espace de Sobolev $H^{1/2}(\mathbb{R}^{N-1})$. Or on sait que les restrictions à $\mathbb{R}^N_+$ des fonctions de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ sont denses dans $H^1(\mathbb{R}^N_+)$, donc pour pouvoir définir une trace pour n'importe quelle fonction $u \in H^1(\mathbb{R}^N_+)$ il suffit que l'application τ_0 définie ci-dessus (qui est linéaire) soit continue pour la norme H^1 (c'est le principe habituel du prolongement par densité). Il faut donc prouver une inégalité du type

$$\|\tau_0(u)\|_{H^{1/2}(R^{N-1})} \leq C\|u\|_{H^1(R^N_+)}$$

pour toute fonction de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$. Pour celà nous allons utiliser la transformée de Fourier partielle en x' donnée par :

$$\widehat{f}(\xi', x_N) = \int_{\mathbb{R}^{N-1}} f(x', x_N) e^{-ix'.\xi'}\, dx'.$$

Alors, en utilisant des relations de Parseval, on vérifie que, si $u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$, la norme $\|u\|_{H^1(R^N_+)}$ est équivalente à la norme $\|\widehat{u}\|_1$ donnée par :

$$\|\widehat{u}\|_1^2 = \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^{N-1}} (1+|\xi'|^2|)\widehat{u}(\xi', x_N)|^2\, d\xi' dx_N + \int_0^{+\infty} dx_N \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \left|\frac{\partial}{\partial x_N}\widehat{u}(\xi', x_N)\right|^2 d\xi'$$

$$= \int_{\mathbb{R}^{N-1}} (1+|\xi'|^2) \int_0^{+\infty} |\widehat{u}(\xi', x_N)|^2\, dx_N d\xi' + \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \int_0^{+\infty} \left|\frac{\partial}{\partial x_N}\widehat{u}(\xi', x_N)\right|^2 dx_N d\xi'$$

tandis que la norme $\|\tau_0(u)\|_{H^{1/2}(R^{N-1})}$ est équivalente à la norme $\|\tau_0(\widehat{u})\|_{1/2}$ donnée par :

$$\|\tau_0(\widehat{u})\|_{1/2}^2 = \int_{\mathbb{R}^{N-1}} (1+|\xi'|^2)^{1/2} |\widehat{u}(\xi', 0)|^2\, d\xi'$$

de sorte que tout revient à montrer une inégalité du type :

$$\|\tau_0(\widehat{u})\|_{1/2}^2 \leq C\|\widehat{u}\|_1^2. \tag{2.10}$$

Nous allons pour celà utiliser le lemme élémentaire suivant que vous avez peut-être déjà démontré sous une forme plus ou moins équivalente dans l'exercice 2.2 (et c'est pour celà que je laisserai la démonstration de ce lemme en guise d'exercice)

Lemme 2.2.1 *Soit $v \in H^1(\mathbb{R}_+)$, alors on sait que v admet un représentant continu et on a*

$$|v(0)|^2 \leq 2\|v\|_{L^2(R_+)}\|v'\|_{L^2(R_+)}.$$

On applique alors ce lemme à la fonction v (dépendant du paramètre ξ) définie par :

$$v(x_N) = \widehat{u}(\xi', x_N) \quad \text{où } u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N).$$

On a donc :

$$|\widehat{u}(\xi', 0)|^2 \leq 2\left(\int_0^{+\infty} |\widehat{u}(\xi', x_N)|^2\, dx_N\right)^{1/2} \left(\int_0^{+\infty} \left|\frac{\partial}{\partial x_N}\widehat{u}(\xi', x_N)\right|^2 dx_N\right)^{1/2}$$

d'où l'on déduit

$$(1+|\xi'|^2)^{1/2}|\widehat{u}(\xi',0)|^2 \leq 2\left((1+|\xi'|^2)\int_0^{+\infty}|\widehat{u}(\xi',x_N)|^2\,dx_N\right)^{1/2}\left(\int_0^{+\infty}\left|\frac{\partial}{\partial x_N}\widehat{u}(\xi',x_N)\right|^2\,dx_N\right)^{1/2}$$

et, en utilisant l'inégalité $ab \leq 1/2(a^2+b^2)$:

$$(1+|\xi'|^2)^{1/2}|\widehat{u}(\xi',0)|^2 \leq (1+|\xi'|^2)\int_0^{+\infty}|\widehat{u}(\xi',x_N)|^2\,dx_N \;+\; \int_0^{+\infty}\left|\frac{\partial}{\partial x_N}\widehat{u}(\xi',x_N)\right|^2\,dx_N$$

d'où on tire l'inégalité (2.10) recherchée, par intégration sur $\mathbb{R}^{N-1}$.

On a donc prouvé qu'on pouvait définir la trace d'une fonction de $H^1(R^N_+)$ sur $\mathbb{R}^{N-1}$ et que cette trace était un élément de l'espace de Sobolev $H^{1/2}(R^{N-1})$. L'application trace, qu'on va continuer à noter τ_0, est donc une application linéaire continue de $H^1(R^N_+)$ dans $H^{1/2}(R^{N-1})$. Le théorème qui suit reprend ces résultats et les complète en donnant le noyau et l'image de l'opérateur τ_0.

Théorème 2.3 (Trace) *Il existe une application linéaire continue, qu'on appellera* **trace** *et qu'on notera τ_0 de $H^1(R^N_+)$ dans $H^{1/2}(R^{N-1})$ et qui prolonge l'application restriction usuelle pour les fonctions continues.*
Cette application est surjective et son noyau n'est autre que

$$\ker \tau_0 = H^1_0(R^N_+).$$

Le fait que le noyau de l'application trace est exactement $H^1_0(R^N_+)$ n'a rien de surprenant puisqu'on a justement interprété les fonctions de H^1_0 comme étant les fonctions qui s'annulaient "en un certain sens" sur le bord (voir proposition 2.0.5).

Il nous reste maintenant à généraliser ces résultats pour un ouvert Ω quelconque (quoique régulier).
Considérons donc un ouvert Ω lipschitzien. On imagine bien (et c'est la raison pour laquelle je ne détaillerai pas plus) qu'en travaillant avec des cartes locales, on peut se transporter sur un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^N_+$ et donc se ramener au cas précédent. On peut donc énoncer le résultat général suivant :

Théorème 2.4 *Soit Ω un ouvert lipschitzien, alors il existe un opérateur linéaire continu, appelé opérateur trace et noté τ_0 de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\partial\Omega)$ qui coïncide avec l'opérateur restriction usuel pour les fonctions continues. De plus, le noyau de τ_0 est exactement $H^1_0(\Omega)$. Enfin, l'image de τ_0 qui est un sous-espace strict de $L^2(\partial\Omega)$ sera notée $H^{1/2}(\partial\Omega)$.*

Remarque :
On a choisi de définir ici $H^{1/2}(\partial\Omega)$ comme image de l'opérateur de trace (car il est clair que la définition donnée dans le cas de $\mathbb{R}^N$ par les transformées de Fourier ne peut pas être adaptée à une autre situation). Or il faut savoir qu'on peut définir les espaces de Sobolev fractionnaires du type $H^{1/2}$ directement par interpolation entre L^2 et H^1 (voir Lions-Magenes). Si on utilise cette approche-assez compliquée, il faut reconnaître- le fait que l'image de l'opérateur trace τ_0 est $H^{1/2}(\partial\Omega)$ devient alors un théorème.

Une conséquence très importante des théorèmes de trace énoncés ci-dessus est la possibilité d'étendre les formules de Green rappelées dans les prérequis du chapitre 1, aux fonctions définies sur un espace de Sobolev. En effet, si Ω est un ouvert lipschitzien et Γ son bord, la formule de Green :

$$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} v dx = \int_\Gamma u v n_i d\sigma \ + \int_\Omega \frac{\partial v}{\partial x_i} u dx$$

(où n_i est la ième composante du vecteur normal à Γ dirigé vers l'extérieur) étant valable évidemment pour des fonctions de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ va se prolonger par densité, quand u et v sont des fonctions de $H^1(\Omega)$ à condition de comprendre l'intégrale de frontière $\int_\Gamma u v n_i d\sigma$ comme étant $\int_\Gamma (\tau_0 u)(\tau_0 v) n_i d\sigma$ (qui est bien définie car $(\tau_0 u)$ et$(\tau_0 v)$ sont dans $L^2(\Gamma)$ et n_i est borné).
De même si u est une fonction de l'espace de Sobolev $H^2(\Omega)$, chaque dérivée partielle $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ étant dans $H^1(\Omega)$ possède une trace sur Γ et donc la dérivée normale $\frac{\partial u}{\partial n} = \nabla u.n$ est parfaitement définie et est dans $L^2(\Gamma)$. Il en résulte, encore une fois par densité (on utilise bien sûr la continuité de l'opérateur trace) que la deuxième formule de Green :

$$\int_\Omega \Delta u v dx = \int_\Gamma (\tau_0 \frac{\partial u}{\partial n})(\tau_0 v) d\sigma \ - \int_\Omega \nabla u . \nabla v dx$$

est valable pour toute fonction $u \in H^2(\Omega)$ et $v \in H^1(\Omega)$.
Notez qu' à l'avenir, nous ne prendrons pas la peine de noter toujours $\tau_0(u)$ quand interviendra la trace de u dans une intégrale de bord. Comme il n'y aura, en général, aucune ambiguïté possible, on continuera à écrire par exemple $\int_\Gamma u v n_i d\sigma$ même quand u et v sont des fonctions de $H^1(\Omega)$.

Chapitre 3

Formulation variationnelle des problèmes elliptiques

L'objet de ce chapitre est de donner la théorie classique de résolution des problèmes elliptiques **linéaires**, via la formulation variationnelle et le théorème de Lax-Milgram. Dans ce poly je tâcherai d'être le plus complet possible, en envisageant tous les types de condition au bord (quitte à laisser quelques démonstrations à titre d'exercice).

3.1 Le problème de Dirichlet

3.1.1 Introduction

Nous commençons, bien évidemment, par le problème le plus simple : le problème de Dirichlet, pour le laplacien, avec condition au bord homogène :

$$\begin{cases} -\Delta u & = & f \ \text{ dans } \Omega \\ u & = & 0 \ \text{ sur } \partial\Omega \end{cases} \tag{3.1}$$

où, Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^N$ (pour l'instant, on ne met aucune restriction sur le type d'ouvert) et f une fonction, par exemple dans $L^2(\Omega)$, qui est l'espace naturel, en physique, puisqu'il correspond à une force d'énergie totale (sa norme L^2) finie. On recherche une fonction u, dans un espace à préciser, qui soit solution de (3.1) en un sens également à préciser.

Commençons par la condition au bord $u = 0$ sur $\partial\Omega$. L'idée la plus naturelle consisterait à rechercher une fonction u qui soit continue sur $\overline{\Omega}$ de sorte que cette condition soit vérifiée en un sens classique. Cette approche a été effectivement la première étudiée (par exemple par les spécialistes de la théorie du potentiel) mais il s'avère qu'elle est beaucoup plus compliquée que celle que nous allons suivre et qu'elle fait, en particulier, intervenir des propriétés délicates de la frontière de l'ouvert (régularité au sens de Wiener). Du coup, si on décide de ne pas travailler dans l'espace des fonctions continues, il faut tout de même pouvoir donner un sens à cette condition $u = 0$ sur $\partial\Omega$. Or, et vous voyez probablement où je veux en venir, c'est quelque chose qu'on a su faire dans le chapitre précédent sur les espaces de Sobolev : comme il est possible de parler de la trace d'une fonction quand

celle-ci est dans un espace de Sobolev du type $H^1(\Omega)$ on interprétera la condition $u = 0$ sur $\partial\Omega$ en disant que u doit avoir sa trace nulle sur $\partial\Omega$, autrement dit u devra être dans le noyau de l'opérateur trace, c'est-à-dire **dans l'espace** $H_0^1(\Omega)$.
Pour ce qui est de l'équation $-\Delta u = f$ dans Ω, elle-même, là il y a une interprétation toute naturelle, à partir du moment où on a décidé de prendre $u \in H_0^1(\Omega)$, u peut alors être considérée comme une distribution et cette équation sera donc à comprendre **a-priori** dans $\mathcal{D}'(\Omega)$ (on verra plus loin que, moyennant certaines hypothèses supplémentaires sur l'ouvert Ω, on pourra donner un sens plus fort à cette égalité).

Nous allons maintenant donner d'autres formulations équivalentes du problème (3.1), chacune d'entre elle ayant une interprétation physique différente.

Théorème 3.1 *Soit f une fonction de $L^2(\Omega)$, alors les problèmes suivants sont équivalents :*

(i) *Trouver $u \in H_0^1(\Omega)$, tel que $-\Delta u = f$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$*

(ii) *Trouver $u \in H_0^1(\Omega)$, tel que $\forall v \in H_0^1(\Omega)$,*

$$\int_\Omega \nabla u.\nabla v(x)\,dx = \int_\Omega f v(x)\,dx$$

(iii) *Trouver $u \in H_0^1(\Omega)$ qui minimise la fonctionnelle*
$J(v) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v(x)|^2\,dx - \int_\Omega f v(x)\,dx$ *sur* $H_0^1(\Omega)$

La formulation (i) est celle qu'on a déjà rencontrée, c'est l'équation aux dérivées partielles proprement dite. La formulation (ii) s'appelle en physique le principe des travaux virtuels ; il exprime que le travail interne du système est égal au travail produit par la force extérieure. La formulation (iii) est le principe habituel de minimisation de l'énergie totale du système, celle-ci est la fonctionnelle J somme de l'énergie cinétique du système et de l'énergie potentielle créée par la force extérieure. Dire que ces trois problèmes sont équivalents signifie simplement que si u est une solution de l'un d'entre eux, elle est aussi solution des deux autres.

Démonstration :
Nous allons tout d'abord montrer que (i) $\iff$ (ii).
Si u est solution de (ii), alors puisque $\mathcal{D}(\Omega) \subset H_0^1(\Omega)$, on a $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$:

$$\int_\Omega \nabla u.\nabla \varphi(x)\,dx = \sum_{k=1}^N \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_k}\frac{\partial \varphi}{\partial x_k}\,dx = \int_\Omega f v(x)\,dx. \tag{3.2}$$

Or, par définition de la dérivée au sens des distributions

$$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_k}\frac{\partial \varphi}{\partial x_k}\,dx =< \frac{\partial u}{\partial x_k}, \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} >_{\mathcal{D}'\times\mathcal{D}} = - < \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2}, \varphi >_{\mathcal{D}'\times\mathcal{D}}$$

d'où l'on tire de (3.2)

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega),\ \sum_{k=1}^N < -\frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2}, \varphi >_{\mathcal{D}'\times\mathcal{D}} =< -\Delta u, \varphi >_{\mathcal{D}'\times\mathcal{D}} =< f, \varphi >_{\mathcal{D}'\times\mathcal{D}}$$

ce qui signifie bien $-\Delta u = f$ au sens des distributions.
Réciproquement, si u vérifie $-\Delta u = f$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$, alors les calculs précédents, effectués dans l'autre sens montrent que

$$\int_\Omega \nabla u.\nabla\varphi(x)\,dx = \int_\Omega fv(x)\,dx$$

pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ et donc pour toute fonction $\varphi \in H_0^1(\Omega)$ par densité de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $H_0^1(\Omega)$ d'où u est bien solution de (ii).
Montrons maintenant l'équivalence de (ii) et (iii). Pour celà calculons, pour une fonction $v \in H_0^1(\Omega)$ et un réel t quelconques

$$J(u+tv) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla(u+tv)(x)|^2\,dx - \int_\Omega f(u+tv)(x)\,dx =$$

$$= J(u) + t\int_\Omega \nabla u.\nabla v(x)\,dx + \frac{t^2}{2}\int_\Omega |\nabla v|^2\,dx - t\int_\Omega fv(x)\,dx. \tag{3.3}$$

On en déduit que si u est solution de (ii), alors

$$\forall v \in H_0^1(\Omega),\quad J(u+v) = J(u) + \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v|^2\,dx \tag{3.4}$$

et donc u réalise bien le minimum de J sur $H_0^1(\Omega)$ (car $u+v$ décrit $H_0^1(\Omega)$, quand v décrit $H_0^1(\Omega)$).
Réciproquement, si u minimise J, alors $J(u+tv) \geq J(u)$ pour tout $v \in H_0^1(\Omega)$ et tout $t \in \mathbb{R}$ d'où

$$\forall t \in \mathbb{R},\quad t(\int_\Omega \nabla u.\nabla v(x)\,dx - \int_\Omega fv(x)\,dx) + \frac{t^2}{2}\int_\Omega |\nabla v|^2\,dx \geq 0. \tag{3.5}$$

En divisant alors (3.5) par $t > 0$ puis en faisant tendre t vers 0, on obtient

$$\int_\Omega \nabla u.\nabla v(x)\,dx - \int_\Omega fv(x)\,dx \geq 0.$$

En faisant de même avec $t < 0$, on obtient l'inégalité dans l'autre sens d'où u est solution de (ii).

Remarque :
Le théorème précédent ne montre évidemment pas l'existence d'une solution aux problèmes (i), (ii) ou (iii). En revanche, une conséquence importante de la démonstration ci-dessus est que la solution, si elle existe **est unique**. On le voit à l'aide de (3.4) : si $\nabla v \neq 0$, on a $J(u+v) > J(u)$, or la seule fonction constante par morceaux (c'est-à-dire la fonction vérifiant $\nabla v = 0$) de $H_0^1(\Omega)$ est la fonction nulle, donc si $v \neq u$, on a bien $J(v) > J(u)$ et, d'après la formulation (iii) u est la seule solution du problème.

Exercice 3.1 :
1) Calculez la différentielle de la fonctionnelle J définie sur $H_0^1(\Omega)$ par :

$$J(v) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v(x)|^2\,dx - \int_\Omega fv(x)\,dx.$$

En déduire que la formulation (ii) du théorème 1 n'est autre que la condition d'optimalité pour le minimum de la fonctionnelle J (on parle aussi de conditions d'Euler du problème de minimisation).
2) Même question pour la fonctionnelle définie sur $H_0^1(\Omega) \cap L^4(\Omega)$ par :

$$J(v) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v(x)|^2\,dx + \int_\Omega |v(x)|^4\,dx - \int_\Omega fv(x)\,dx.$$

Quelle est l'e.d.p. satisfaite par le minimum u de J (s'il existe) ?

3.1.2 Existence

Il ne faut pas croire que les problèmes énoncés dans le théorème 3.1 possèdent toujours une solution. L'exercice suivant, si vous le résolvez, vous en donnera la preuve.

Exercice 3.2 : Déterminez une fonction $f \in L^2(\mathbb{R})$ telle que le problème

$$\begin{cases} -u'' = f \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}) \\ u \in H_0^1(\mathbb{R}) = H^1(\mathbb{R}) \end{cases}$$

n'admette pas de solution.

C'est sous la forme (ii) que l'on va pouvoir le plus facilement prouver l'existence d'une solution à notre problème, et on va pour celà utiliser un résultat abstrait fondamental qui est le théorème de Lax-Milgram. Mais tout d'abord quelques définitions.
Dans ce qui suit V désignera un espace de Hilbert et V' son dual (qu'on n'identifiera pas ici à V). On considère tout d'abord une forme bilinéaire sur $V \times V$ qu'on notera $a(u,v)$ ($a(u,v)$ est donc linéaire par rapport à chacun de ses arguments et est à valeurs dans $\mathbb{R}$).
On dira que

- la forme bilinéaire $a(u,v)$ est continue si il existe une constante M telle que

$$\forall u, v \in V, \quad |a(u,v)| \le M\|u\|_V\|v\|_V$$

  où $\|.\|_V$ désigne bien sûr la norme sur V.
- la forme bilinéaire $a(u,v)$ est V-elliptique (on dit aussi quelquefois coercive) si il existe une constante $\alpha > 0$ telle que

$$\forall u \in V, \quad a(u,u) \ge \alpha\|u\|_V^2.$$

En général l'hypothèse de continuité de la forme bilinéaire avec laquelle on travaille (dans notre cas celà va être $a(u,v) = \int_\Omega \nabla u.\nabla v(x)\,dx$) se vérifie assez facilement et c'est l'hypothèse d' ellipticité qu'il est plus difficile d'établir.
Nous pouvons donc énoncer maintenant le résultat principal de ce paragraphe

Théorème 3.2 (Lax-Milgram) *Soit $a(u,v)$ une forme bilinéaire continue et elliptique sur un espace de Hilbert V et soit F une forme linéaire continue sur V (c'est-à-dire un élément de V'). Alors il existe un unique élément u dans V solution de*

$$a(u,v) = F(v) \quad \forall v \in V. \tag{3.6}$$

De plus si a est symétrique, la solution u du problème (3.6) est l'unique solution du problème de minimisation :

$$\min_{v \in V}\{\frac{1}{2}\, a(v,v) - F(v)\}$$

Remarque : Un bon exemple de forme bilinéaire continue et coercive est le produit scalaire sur V. Le théorème de Lax-Milgram signifie dans ce cas que pour toute forme linéaire continue F, il existe $u \in V$ tel que $F(v) = (u,v)$ ce qui n'est autre que le classique théorème de représentation de Riesz.

Démonstration : Pour u fixé dans V, considérons l'application $A_u : V \to \mathbb{R}$ qui à v associe $a(u,v)$. C'est clairement une forme linéaire continue sur V, donc l'application A qui à u associe A_u est une application linéaire de V dans V'. Nous allons montrer que c'est un isomorphisme, ce qui est une autre façon d'exprimer le résultat que nous voulons montrer.

L'opérateur A est continu puisque

$$| < Au, v > | = |a(u,v)| \leq M\|u\|_V\|v\|_V$$

et donc

$$\|Au\|_{V'} \stackrel{def}{=} \sup_{v \in V} \frac{| < Au, v > |}{\|v\|_V} \leq M\|u\|_V.$$

Maintenant, on a aussi par ellipticité

$$\|Au\|_{V'}\|u\|_V \geq | < Au, u > | \geq \alpha\|u\|_V^2$$

d'où, en simplifiant

$$\|Au\|_{V'} \geq \alpha\|u\|_V \tag{3.7}$$

et A est donc injective. De plus il résulte de (3.7) que **l'image de A est fermée** : en effet, si u_n est une suite d'éléments de $Im(A)$ ($u_n = Av_n$) qui converge vers u, alors la suite u_n étant de Cauchy on a, grâce à (3.7) pour n et p assez grand

$$\varepsilon > \|Av_n - Av_p\|_{V'} \geq \alpha\|v_n - v_p\|_V$$

et donc la suite v_n est également de Cauchy et donc convergente vers un élément noté v. Maintenant par continuité de A, Av_n converge vers Av et donc $Av = u$, ce qui prouve que $u \in Im(A)$.

Montrons à présent que l'image de A est dense ce qui, à l'aide du résultat précédent, prouvera bien que A est surjectif. On sait bien que montrer que l'image de A est dense est équivalent à montrer que son orthogonal (au sens des formes linéaires) est réduit à $\{0\}$. Soit donc $v_0 \in V$ telle que $\forall v \in V$, $< Av, v_0 >_{V' \times V} = 0$. En prenant alors $v = v_0$, on obtient $\alpha\|v_0\|_V^2 \leq < Av_0, v_0 >_{V' \times V} = 0$, d'où $v_0 = 0$ ce qui achève la démonstration de la première partie du théorème. La deuxième partie se démontre exactement comme dans le théorème précédent.

Remarque :
Si u est la solution du problème (3.6), alors on a immédiatement une estimation de sa norme en fonction des données. On a en effet :

$$\alpha\|u\|_V^2 \leq a(u,u) = F(u) \leq \|F\|_{V'}\|u\|_V$$

d'où

$$\|u\|_V \leq \frac{\|F\|_{V'}}{\alpha}. \tag{3.8}$$

Nous allons maintenant appliquer le théorème de Lax-Milgram pour prouver l'existence d'une solution au problème de Dirichlet dans le cas d'un ouvert borné dans une direction. En effet l'ingrédient essentiel de la démonstration sera l'inégalité de Poincaré qui va nous servir à prouver l'ellipticité de la forme bilinéaire.

Théorème 3.3 *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$ qu'on suppose borné dans une direction (cf chapitre 2) et $f \in L^2(\Omega)$. Alors il existe une solution unique au problème*
Trouver $u \in H_0^1(\Omega)$, tel que $\forall v \in H_0^1(\Omega)$,

$$\int_\Omega \nabla u.\nabla v(x)\,dx = \int_\Omega fv(x)\,dx.$$

Démonstration
On applique évidemment le théorème de Lax-Milgram avec dans cette situation
- $V = H_0^1(\Omega)$
- $a(u,v) = \int_\Omega \nabla u.\nabla v(x)\,dx$
- $F(v) = \int_\Omega fv(x)\,dx$.

Alors comme il est clair que la forme bilinéaire a est continue (et symétrique) ainsi que la forme linéaire F, il ne reste plus à vérifier que la H_0^1-ellipticité de a. Or c'est une conséquence immédiate de l'inégalité de Poincaré puisque

$$\int_\Omega u^2(x)\,dx \leq C\int_\Omega |\nabla u|^2(x)\,dx$$

entraîne bien que

$$a(u,u) = \int_\Omega |\nabla u|^2(x)\,dx \geq \frac{1}{C+1}(\int_\Omega u^2(x)\,dx + \int_\Omega |\nabla u|^2(x)\,dx).$$

Remarque : Dans l'énoncé du théorème on a pris $f \in L^2(\Omega)$. Mais il est clair que si on choisit f dans le dual de $H_0^1(\Omega)$ alors le résultat est encore vrai.

Nous venons donc de résoudre le problème de Dirichlet avec condition au bord homogène (c'est-à-dire $u = 0$ sur le bord du domaine) tout au moins dans le cas d'un ouvert borné dans une direction (on a vu par ailleurs dans l'exercice 3.2 que dans le cas d'un ouvert non borné, il n'y avait pas forcément de solution). Posons nous à présent la question de savoir comment faire pour résoudre le problème non homogène :

$$\left\{\begin{array}{rcl} -\Delta u & = & f \text{ dans } \Omega \\ u & = & g \text{ sur } \partial\Omega \end{array}\right. \tag{3.9}$$

et tout d'abord dans quel espace doit-on prendre la fonction g ? Si on souhaite choisir une fonction g qui est continue, on est confronté à des difficultés techniques, comme je l'ai déjà dit, qui sortent du cadre de ce cours (théorie du potentiel, critère de régularité de Wiener). En fonction des résultats du chapitre 2 il semble, une nouvelle fois, plus intéressant de travailler dans le cadre des espaces de Sobolev. Mais alors quel sens donner à la condition $u = g$ sur le bord de Ω ? Avec la théorie de la trace il est naturel de comprendre cette condition en disant $u = g$ sur $\partial\Omega$ signifie que la trace de u est égale à g sur $\partial\Omega$.
Supposons donc que l'ouvert Ω sur lequel le problème est posé est lipschitzien et considérons une fonction g dans l'espace $H^{1/2}(\partial\Omega)$; alors le théorème de trace qui nous dit que l'opérateur trace τ_0 a pour image $H^{1/2}(\partial\Omega)$ prouve l'existence d'une fonction $G \in H^1(\Omega)$ dont la trace est g. De plus on peut vérifier également que ΔG est une distribution élément du dual de $H_0^1(\Omega)$. Donc en posant $v = u - G$, on a évidemment $v \in H_0^1(\Omega)$ et on est donc ramené au problème

$$\left\{\begin{array}{rcl} -\Delta v & = & f + \Delta G \text{ dans } \Omega \\ v & = & 0 \text{ sur } \partial\Omega \end{array}\right.$$

qui est redevable de la théorie précédente puisque $f + \Delta G \in H^{-1}(\Omega)$.
Nous étudierons les autres types de conditions au bord un peu plus loin et nous allons maintenant nous intéresser à la régularité des solutions du problème (3.1), ce qui répondra, en particulier, à la question de savoir quand peut on comprendre l'équation $-\Delta u = f$ en un sens plus fort que simplement au sens des distributions.

3.1.3 Régularité de la solution d'un problème de Dirichlet

Quand on résout une équation aux dérivées partielles par la méthode variationnelle décrite ci-dessus, en règle générale on le fait en changeant quelque peu la notion de solution. Alors que quelquefois dans les applications on a besoin de trouver des solutions classiques (par exemple de classe C^2) de l' e.d.p., la méthode variationnelle ne permet, a priori, de trouver que des solutions faibles **au sens où l'équation n'est vérifiée que dans $\mathcal{D}'(\Omega)$.**
Par exemple si l'on considère le problème de Dirichlet (3.1) dans un ouvert borné et régulier Ω, même si la donnée du second membre f est dans $C^\infty(\overline{\Omega})$, l'application du théorème de Lax-Milgram ne nous donne qu'une solution dans $H_0^1(\Omega)$ (ce qu'on appelle une solution faible) alors que l'utilisation d'autres techniques, certes plus compliquées mais plus fines permettraient d'obtenir une solution $u \in C^\infty(\overline{\Omega})$. On voit donc qu'il est indispensable de se poser la question de la régularité de la solution u du problème, plus précisément on va se poser la question de savoir sous quelles hypothèses la solution faible ainsi trouvée est, par exemple une solution classique. Ce ne sera pas toujours vrai et on verra que cela dépend en particulier de l'ouvert Ω sur lequel on travaille.

Notons qu'il existe plusieurs notions de régularité (qui se recouvrent en partie). Il y a d'abord la régularité au sens classique des espaces C^k ou des espaces de Hölder $C^{k,\theta}$. Rappelons qu'on dit qu'une fonction f est hölderienne de rapport θ sur Ω s'il existe une constante C telle que

$$\forall x, y \in \Omega \quad |f(x) - f(y)| \leq C|x-y|^\theta.$$

L'espace $C^{k,\theta}$ est alors l'espace des fonctions de classe C^k dont la dérivée (ou les dérivées partielles dans le cas d'une dimension ≥ 2) d'ordre k sont hölderiennes de rapport θ. Mais il y a aussi la régularité au sens des espaces de Sobolev (plus la fonction u est dans un espace de Sobolev avec un exposant élevé, plus elle est régulière). On peut passer de cette dernière notion à la précédente en utilisant les résultats énoncés dans le chapitre précédent, à savoir les injections de Sobolev.

En général les résultats de régularité sont prouvés en distinguant la régularité à l'intérieur de l'ouvert de celle au bord de l'ouvert. Ici nous nous contenterons de donner sans démonstrations les résultats généraux. Les démonstrations sont en effet très techniques et longues. Le principe en est, tout au moins au début, le même que dans certaines démonstrations précédentes : on commence par étudier le cas $\Omega = \mathbb{R}^N_+$ puis on en déduit le cas général en utilisant des cartes locales.

Théorème 3.4 *Soit Ω un ouvert borné de classe C^2 et f une fonction de $L^2(\Omega)$. Alors la solution du problème*

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega) \\ u \in H^1_0(\Omega) \end{cases}$$

est dans l'espace de Sobolev $H^2(\Omega)$ et de plus, pour une constante C qui ne dépend que de Ω on a

$$\|u\|_{H^2(\Omega)} \leq C\|f\|_{L^2(\Omega)}.$$

Remarque :
Si f est plus régulière, et qu'on veut en déduire davantage de régularité pour u, il faut supposer que l'ouvert Ω est lui aussi plus régulier. Par exemple, si on suppose $f \in H^m(\Omega)$ et Ω de classe C^{m+2} alors $u \in H^{m+2}(\Omega)$ avec une estimation de la norme de u par la norme de f.

Donnons maintenant, pour terminer, un résultat de régularité dans les espaces de Hölder

Théorème 3.5 (Schauder) *Soit Ω un ouvert borné de classe $C^{k+2,\theta}$ où k est un entier ≥ 0 et θ un réel, $0 < \theta < 1$. Soit φ une fonction de $C^{k+2,\theta}(\bar{\Omega})$ et f une fonction de $C^{k,\theta}(\bar{\Omega})$ alors la solution u du problème*

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega \\ u = \varphi & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

est dans l'espace de Hölder $C^{k+2,\theta}(\overline{\Omega})$.

Dans le cas où l'on peut utiliser un de ces théorèmes de régularité, par exemple le théorème 3.4, une conséquence importante en est que la solution u devient un peu plus qu'une solution faible. En effet, si Ω est de classe C^2 et $f \in L^2(\Omega)$, le théorème nous dit que $u \in H^2(\Omega)$ et donc $\Delta u \in L^2(\Omega)$. Ainsi l'équation $-\Delta u = f$ n'est plus vraie seulement au sens des distributions mais aussi au sens des fonctions de L^2 (puisque deux fonctions de L^2 qui sont égales en tant que distributions sont aussi égales en tant que fonction, c'est-à-dire presque partout).

3.2 Autres types de conditions aux limites

3.2.1 Condition de Neumann

Pour résoudre le problème de Dirichlet homogène (3.1), on avait mis la condition au bord ($u = 0$ sur $\partial\Omega$) carrément dans l'espace de travail puisque on s'était placé d'emblée dans l'espace de Sobolev $H_0^1(\Omega)$. Pour la condition de Neumann homogène, dont on a vu au chapitre 1 qu'elle s'écrivait

$$\frac{\partial u}{\partial n} = 0$$

on peut être tenté, dans un premier temps,de faire la même chose c'est-à-dire de travailler dans l'espace des fonctions de $H^1(\Omega)$ telles que $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$ (en admettant que l'ouvert Ω soit assez régulier pour qu'on puisse parler de sa normale n en tous ou presque tous les points de son bord). Malheureusement, pour une fonction $u \in H^1(\Omega)$ on peut parler de la trace de u sur $\partial\Omega$ mais pas de la trace de son gradient qui lui n'est que dans $L^2(\Omega)$. Pour pouvoir parler de ∇u sur $\partial\Omega$, il faut que u soit dans $H^2(\Omega)$. Mais alors, si on choisit comme espace de travail $H^2(\Omega)$, on aura des problèmes pour prouver l'ellipticité de la forme bilinéaire qui entre en jeu. En fait la situation va s'avérer plus simple que cela. La condition au bord de Neumann ne va pas apparaître a priori mais va **être contenue dans la formulation variationnelle du problème** comme on va le voir bientôt.
Notons tout d'abord que, puisqu'on a vu que le problème

$$\begin{cases} -\Delta u = f \ \text{ dans } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \ \text{ sur } \partial\Omega \end{cases}$$

n'avait pas toujours de solution (cf chapitre 1) et on y reviendra un peu plus loin, on va plutôt s'intéresser, dans un premier temps, au problème très voisin

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f \ \text{ dans } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \ \text{ sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.10}$$

Nous allons pour l'instant faire un calcul formel (c'est-à-dire sans se préoccuper de questions d'existence ou de régularité de l'éventuelle solution) pour pouvoir deviner la formulation variationnelle adaptée à ce problème (3.10). Soit donc v une fonction pour le moment quelconque (c'est ce qu'on appelle dans le langage des e.d.p. *une fonction test*) dont on précisera dans quel espace on la choisit un peu plus tard en fonction de l'écriture de la formulation variationnelle. Multiplions l'équation par v et intégrons sur Ω, on obtient

$$-\int_\Omega \Delta u v(x)\, dx + \int_\Omega u v(x)\, dx = \int_\Omega f v(x)\, dx$$

d'où, en utilisant la formule de Green

$$-\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v \, d\sigma + \int_\Omega \nabla u . \nabla v(x) \, dx + \int_\Omega uv(x) \, dx = \int_\Omega fv(x) \, dx$$

ce qui fait, en tenant compte de la condition au bord

$$\int_\Omega \nabla u . \nabla v(x) \, dx + \int_\Omega uv(x) \, dx = \int_\Omega fv(x) \, dx.$$

On voit donc apparaître tout à fait naturellement la formulation variationnelle du problème. Au vu de ce qui précède, on va poser

$$a(u,v) = \int_\Omega \nabla u . \nabla v(x) \, dx + \int_\Omega uv(x) \, dx \tag{3.11}$$

qui est une forme bilinéaire parfaitement définie sur l'espace de Sobolev $H^1(\Omega)$ et, comme d'habitude

$$F(v) = \int_\Omega fv(x) \, dx. \tag{3.12}$$

Enonçons le théorème qui prouve l'existence d'une solution faible au problème de Neumann considéré

Théorème 3.6 *Soit Ω un ouvert quelconque et F un élément du dual de $H^1(\Omega)$, alors il existe une solution unique au problème*

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u \in H^1(\Omega) \;\; \text{tel que } \forall v \in H^1(\Omega) \\ \int_\Omega \nabla u . \nabla v(x) \, dx + \int_\Omega uv(x) \, dx = F(v). \end{array} \right. \tag{3.13}$$

De plus, si Ω est de classe C^2 avec $\partial\Omega$ borné et si $f \in L^2(\Omega)$, alors $u \in H^2(\Omega)$ et vérifie

$$-\Delta u + u = f \;\; \text{presque partout dans } \Omega$$

et

$$\frac{\partial u}{\partial n} = 0 \;\; \text{sur } \partial\Omega$$

au sens des traces.

Démonstration :
La forme bilinéaire $a(u,v)$ définie en (3.11) est clairement continue et H^1-elliptique (puisque $a(u,u) = \|u\|_{H^1}^2$) et la forme linéaire F définie par (3.12) est, elle aussi, continue. Le théorème de Lax-Milgram assure donc l'existence et l'unicité d'une solution au problème variationnel (3.13). En particulier, si on choisit $v = \phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ dans la relation variationnelle, et si on suppose que $f \in L^2(\Omega)$ on obtient compte tenu de l'identité déjà utilisée

$$\int_\Omega \nabla u . \nabla \phi(x) \, dx = \sum_{i=1}^N < \frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial \phi}{\partial x_i} >_{\mathcal{D}' \times \mathcal{D}} = - < \Delta u, \phi >_{\mathcal{D}' \times \mathcal{D}}$$

la relation

$$- < \Delta u, \phi >_{\mathcal{D}' \times \mathcal{D}} + < u, \phi >_{\mathcal{D}' \times \mathcal{D}} = < f, \phi >_{\mathcal{D}' \times \mathcal{D}}$$

c'est-à-dire

$$-\Delta u + u = f \quad \text{au sens des distributions} \tag{3.14}$$

Maintenant si on suppose de plus que l'ouvert Ω est de classe C^2 alors le théorème de régularité énoncé un peu plus haut peut également s'adapter avec quelques légères modifications à ce nouveau cas et on peut donc prouver que la solution u du problème (3.13) est dans l'espace $H^2(\Omega)$. Les deux membres de l'égalité (3.14) étant dans $L^2(\Omega)$ cette égalité devient vraie non seulement au sens des distributions, mais aussi au sens des fonctions de L^2 (donc en particulier presque partout). Reprenons alors la formulation variationnelle avec une fonction $v \in H^1(\Omega)$ quelconque. Puisque $u \in H^2(\Omega)$ on peut utiliser la formule de Green (cf chapitre 2) et la relation devient

$$\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v \, d\sigma - \int_\Omega \Delta u v(x) \, dx + \int_\Omega u v(x) \, dx = \int_\Omega f v(x) \, dx$$

or comme on a $-\Delta u + u = f$ dans Ω les intégrales sur Ω se simplifient et il reste

$$\forall v \in H^1(\omega) \quad \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v \, d\sigma = 0. \tag{3.15}$$

Mais comme l'image de l'opérateur trace ($H^{1/2}(\partial\Omega)$) est dense dans $L^2(\partial\Omega)$ la relation (3.15) entraîne bien que

$$\frac{\partial u}{\partial n} = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega$$

ce qu'il fallait prouver.

Traitons maintenant le cas non homogène

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f & \text{dans } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} = g & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.16}$$

où f est, par exemple un élément de $L^2(\Omega)$ et g une fonction définie sur $\partial\Omega$ dont on précisera plus loin la régularité. La première idée pour résoudre (3.16) est de faire comme pour le problème de Dirichlet, c'est-à-dire qu'on peut essayer de se ramener au problème (3.9) par une translation. Ceci nécessite évidemment de pouvoir **relever** la fonction g, c'est-à-dire qu'on souhaiterait disposer d'une fonction G définie sur Ω telle que

$$\frac{\partial G}{\partial n} = g \quad \text{sur } \partial\Omega.$$

C'est effectivement toujours possible (celà va être une conséquence de l'autre méthode qu'on va présenter) mais pratiquement assez peu utilisable, sauf dans des cas très particuliers du fait de la difficulté de trouver la fonction G (voir l'exercice ci-dessous).

Exercice 3.3 :
1) Soit $\Omega = [0,1]^2$ le carré unité de $\mathbb{R}^2$, pour chacune des fonctions suivantes g, trouver une fonction $G \in H^1(\Omega)$ telle que $\frac{\partial G}{\partial n} = g$ sur $\partial\Omega$) :

$$g(x,y) = 1 \qquad g(x,y) = x + y \qquad g(x,y) = xy$$

2) Même question si Ω est le disque unité de $\mathbb{R}^2$.

Revenons au problème (3.16) et, plus précisément, reprenons les calculs du début de ce paragraphe quand nous recherchions la formulation variationnelle pour le problème de Neumann homogène. Après avoir multiplié l'équation par une fonction $v \in H^1(\Omega)$ et intégré sur Ω, nous avions obtenu grâce à la formule de Green

$$-\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v \, d\sigma + \int_{\Omega} \nabla u . \nabla v(x) \, dx + \int_{\Omega} uv(x) \, dx = \int_{\Omega} fv(x) \, dx$$

ce qui nous donne ici, avec la nouvelle condition au bord

$$\int_{\Omega} \nabla u . \nabla v(x) \, dx + \int_{\Omega} uv(x) \, dx = \int_{\Omega} fv(x) \, dx + \int_{\partial\Omega} gv \, d\sigma$$

et on est donc ramené à un problème variationnel du même type que précédemment, seule la forme linéaire du second membre ayant changé.

Exercice 3.4 :
Prouver que le problème :

trouver $u \in H^1(\Omega)$ tel que $\forall v \in H^1(\Omega)$

$$\int_{\Omega} \nabla u . \nabla v(x) \, dx + \int_{\Omega} uv(x) \, dx = \int_{\Omega} fv(x) \, dx + \int_{\partial\Omega} gv \, d\sigma$$

possède une solution unique (on précisera bien les conditions sur les données f, g) et que celle-ci, si Ω est de classe C^2, est solution de (3.16) en un sens classique.

Voici maintenant, également en exercice, le cas du problème de Neumann pour l'équation plus classique

$$\begin{cases} -\Delta u = f \quad \text{dans } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} = g \quad \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.17}$$

Nous avons déjà vu en exercice dans le chapitre 1 qu'une condition nécessaire d'existence d'une solution pour ce problème (3.17) est la relation entre les fonctions f et g :

$$\int_{\partial\Omega} g \, d\sigma + \int_{\Omega} f(x) \, dx = 0 \tag{3.18}$$

relation qu'on obtient évidemment en intégrant l'équation $-\Delta u = f$ sur Ω. De plus, s'il existe une solution u pour le problème (3.17), il est clair qu'il y en a une infinité puisque toute fonction de la forme $u + \textit{constante}$ est évidemment encore solution. On voit donc bien qu'il ne peut être question d'invoquer ici directement le théorème de Lax-Milgram sur $H^1(\Omega)$.

Exercice 3.5 :
Soit Ω un ouvert borné régulier. On considère ici l'espace vectoriel quotient $V = H^1(\Omega)/\mathbb{R}$

(dont les éléments sont les classes d'équivalence $\dot{v} = \{v + c,\ c \in \mathbb{R}\}$) qu'on munit de la norme

$$\|\dot{v}\|_V := \inf\{\|v\|_{H^1}, v \in \dot{v}\}$$

1) Vérifier que c'est bien une norme et que V muni de cette norme est un espace de Hilbert.
2) Vérifier qu'on peut définir une forme bilinéaire sur V par

$$a(\dot{u}, \dot{v}) = \int_\Omega \nabla u.\nabla v(x)\, dx$$

où u et v sont des représentants de $\dot{u}$ et $\dot{v}$, ainsi qu'une forme linéaire L sur V par

$$L(\dot{v}) = \int_\Omega f v(x)\, dx + \int_{\partial\Omega} gv\, d\sigma$$

où v est un représentant de $\dot{v}$ (on prendra $f \in L^2(\Omega)$ et $g \in L^2(\partial\Omega)$ et on supposera la relation (3.18) vérifiée).
3) Montrer que le problème
Trouver $\dot{u} \in V$ tel que pour tout $\dot{v} \in V$

$$a(\dot{u}, \dot{v}) = L(\dot{v})$$

possède une solution unique et que celle-ci fournit une infinité de solutions au problème de Neumann (3.17).

Exercice 3.6 :
On veut résoudre l'équation différentielle suivante sur l'intervalle $]0, 1[$:

$$\begin{cases} -u'' + \alpha(x)u' + \beta(x)u = f \\ u(0) = 0; u'(1) = 0 \end{cases}$$

1) Ecrire une formulation variationnelle pour ce problème.
2) Déterminer des conditions sur les fonctions α et β pour que le problème variationnel trouvé à la question 1) admette une solution unique pour toute fonction $f \in L^2(]0, 1[)$.
3) Montrer que la solution du problème variationnel est solution de l'équation différentielle au sens classique.

Exercice 3.7 :
Soit Ω un ouvert connexe borné régulier de $\mathbb{R}^N$. On pose $V = H^1(\Omega)$ et, pour u et v dans V :

$$a(u, v) = \int_\Omega \nabla u.\nabla v dx + (\int_\Omega u\, dx)(\int_\Omega v\, dx).$$

1) Montrer que la forme bilinéaire a est coercive sur V.
2) En déduire que, pout tout $f \in L^2(\Omega)$, il existe une et une seule solution du problème : trouver $u \in V$ tel que $\forall v \in V \ \ a(u, v) = \int_\Omega f v\, dx$.
3) On suppose que $\int_\Omega f\, dx = 0$, montrer que $\int_\Omega u\, dx = 0$ et retrouver l'équation aux dérivées partielles vérifiée par u.

3.2.2 Condition de Fourier

Nous allons maintenant résoudre le problème avec condition au limite de Fourier :

$$\begin{cases} -\Delta u = f \quad \text{dans } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} + \alpha u = g \quad \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

On supposera ici que l'ouvert Ω est borné, connexe et régulier. Comme précedemment nous allons tout d'abord deviner la formulation variationnelle grâce à un calcul formel. L'idée est toujours la même : on multiplie l'équation par une fonction test v et on intègre sur Ω. Ce qui donne ici

$$-\int_\Omega \Delta u v(x)\, dx = \int_\Omega f v(x)\, dx$$

d'où, en utilisant toujours la formule de Green

$$-\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v\, d\sigma + \int_\Omega \nabla u.\nabla v(x)\, dx = \int_\Omega f v(x)\, dx$$

ce qui fait, en tenant compte de la condition au bord

$$(3.19) \qquad \int_\Omega \nabla u.\nabla v(x)\, dx + \alpha \int_{\partial\Omega} uv(\sigma)\, d\sigma = \int_\Omega f v(x)\, dx + \int_{\partial\Omega} gv(\sigma)\, d\sigma.$$

On voit donc, là encore, apparaître tout à fait naturellement la formulation variationnelle du problème. Au vu de (3.19), on va donc poser

$$(3.20) \qquad a(u,v) = \int_\Omega \nabla u.\nabla v(x)\, dx + \alpha \int_{\partial\Omega} uv(\sigma)\, d\sigma$$

qui est une forme bilinéaire parfaitement définie sur l'espace de Sobolev $H^1(\Omega)$ à cause du théorème de trace. Quant à la forme linéaire on va évidemment prendre :

$$(3.21) \qquad F(v) = \int_\Omega f v(x)\, dx + \int_{\partial\Omega} gv(\sigma)\, d\sigma.$$

Pour que F soit bien définie on prendra $f \in L^2(\Omega)$ et $g \in L^2(\partial\Omega)$. La difficulté est ici de prouver l'ellipticité de la forme bilinéaire a. Puisque

$$a(u,u) = \int_\Omega |\nabla u(x)|^2\, dx + \alpha \int_{\partial\Omega} u^2(\sigma)\, d\sigma$$

il est clair qu'on aura une inégalité du type

$$a(u,u) \geq \alpha_0 (\int_\Omega |\nabla u|^2\, dx + \int_\Omega u^2(x)\, dx) = \alpha_0 \|u\|_{H^1}^2$$

à condition de pouvoir prouver :

Proposition 3.6.1 (Inégalité de Friedrichs) *Soit Ω un ouvert borné, connexe et lipschitzien de $\mathbb{R}^N$, alors il existe une constante C qui ne dépend que de Ω (et de la dimension N) telle que*

$$(3.22) \qquad \forall u \in H^1(\Omega) \quad \int_\Omega u^2(x)\, dx \leq C(\int_\Omega |\nabla u(x)|^2\, dx + \int_{\partial\Omega} u^2(\sigma)\, d\sigma)$$

Remarquez que pour $u \in H_0^1(\Omega)$, on retrouve l'inégalité de Poincaré. La démonstration ressemble à celle de l'inégalité de Poincaré-Wirtinger faite dans le chapitre précédent, mais comme c'est une forme de démonstration assez fondamentale, je prends la peine de bien la détailler ici encore.

Démonstration :
On raisonne par l'absurde en supposant qu'il n'existe pas de constante C telle que (3.22) soit vraie. Celà peut s'exprimer en disant que pour tout entier n, il existe un élément $u_n \in H^1(\Omega)$ tel que

$$\int_\Omega u_n^2(x)\,dx \geq n(\int_\Omega |\nabla u_n(x)|^2\,dx + \int_{\partial\Omega} u_n^2(\sigma)\,d\sigma) \tag{3.23}$$

Posons alors

$$v_n = \frac{u_n}{\|u_n\|_{L^2}} = \frac{u_n}{(\int_\Omega u_n^2(x)\,dx)^{1/2}}$$

par division des deux membres de (3.23) par $\int_\Omega u_n^2(x)\,dx$ on obtient donc

$$\int_\Omega |\nabla v_n(x)|^2\,dx + \int_{\partial\Omega} v_n^2(\sigma)\,d\sigma \leq \frac{1}{n}. \tag{3.24}$$

On a donc séparément les deux estimations

$$\int_\Omega |\nabla v_n(x)|^2\,dx \leq \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad \int_{\partial\Omega} v_n^2(\sigma)\,d\sigma \leq \frac{1}{n} \tag{3.25}$$

tandis que

$$\int_\Omega v_n^2(x)\,dx = 1. \tag{3.26}$$

Il résulte de (3.25) et (3.26) que la suite v_n est bornée dans $H^1(\Omega)$ et on peut donc en extraire une sous-suite, toujours notée v_n, qui converge faiblement dans $H^1(\Omega)$ vers une fonction $v \in H^1(\Omega)$ (par réflexivité de $H^1(\Omega)$) et fortement dans $L^2(\Omega)$ (par le théorème de Rellich-Kondratchov). Or (3.25) montre que ∇v_n converge (fortement) vers 0 dans $L^2(\Omega)$ donc $\nabla v = 0$ et v est constante sur Ω. Maintenant puisque v_n converge fortement vers v dans $L^2(\Omega)$ et que ∇v_n converge fortement vers $\nabla v = 0$ dans $L^2(\Omega)$, alors v_n converge fortement vers v dans $H^1(\Omega)$. Or l'application trace est continue sur $H^1(\Omega)$ et donc la trace de v_n converge fortement vers la trace de v dans $L^2(\partial\Omega)$. Mais (3.25) montre que la trace de v_n converge fortement vers 0 dans $L^2(\partial\Omega)$ et donc v a une trace nulle sur $\partial\Omega$ et comme v est constant ceci implique que v est nul. Ce qui fournit la contradiction attendue puisque (3.26) entraîne évidemment en passant à la limite $\int_\Omega v^2(x)\,dx = 1$ et qui achève la démonstration de la proposition.

Il résulte immédiatement de l'inégalité de Friedrichs que la forme bilinéaire définie par (3.25) est H^1-elliptique. Les autres hypothèses nécessaires pour pouvoir appliquer le théorème de Lax-Milgram étant faciles à vérifier (faites-le si vous n'êtes pas encore trop au point), on a donc prouvé, en admettant un théorème de régularité analogue à celui déjà énoncé, le

Théorème 3.7 *Soit Ω un ouvert connexe, borné et lipschitzien, f une fonction de $L^2(\Omega)$, g une fonction de $L^2(\partial\Omega)$ et α un réel strictement positif; alors il existe une solution unique au problème*

$$(3.27) \qquad \begin{cases} \text{Trouver } u \in H^1(\Omega) \ \text{ tel que } \forall v \in H^1(\Omega) \\ \int_\Omega \nabla u.\nabla v(x)\,dx + \alpha \int_{\partial\Omega} uv(\sigma)\,d\sigma = \int_\Omega fv(x)\,dx + \int_{\partial\Omega} gv(\sigma)\,d\sigma. \end{cases}$$

De plus, si Ω est de classe C^2 , alors $u \in H^2(\Omega)$ et vérifie

$$-\Delta u = f \ \text{ presque partout dans } \Omega$$

et

$$\frac{\partial u}{\partial n} + \alpha u = g \ \text{ sur } \partial\Omega$$

au sens des traces.

3.2.3 Exemples d'autres problèmes

Nous allons donner maintenant quelques exemples d'autres problèmes elliptiques linéaires qui se résolvent par une méthode variationnelle. Nous nous contenterons de donner les grandes lignes et la démarche à suivre en laissant la plupart des détails à titre d'exercice.

Conditions aux limites mixtes

On se donne un ouvert borné connexe lipschitzien Ω de bord Γ et on suppose que le bord s'écrit comme la réunion de deux sous-parties Γ_0 et Γ_1 (plus précisément $\Gamma_0 \cup \Gamma_1$ est une partition de Γ) où l'on supposera Γ_0 de mesure superficielle non nulle. On se donne aussi une fonction $f \in L^2(\Omega)$ et on veut résoudre le problème :

$$(3.28) \qquad \begin{cases} -\Delta u = f \ \text{ dans } \Omega \\ u = 0 \ \text{ sur } \Gamma_0 \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \ \text{ sur } \Gamma_1 \end{cases}$$

On se place alors sur le sous-espace de $H^1(\Omega)$ défini par :

$$V = \{v \in H^1(\Omega) \ \text{ tel que } \tau_0 v = 0 \text{ sur } \Gamma_0\}$$

(les fonctions de $H^1(\Omega)$ dont la trace sur Γ_0 est nulle).

Exercice 3.8 :
Vérifier que V est un sous-espace fermé de $H^1(\Omega)$, trouver la formulation variationnelle du problème (3.28) et montrer que le théorème de Lax-Milgram s'applique bien. En admettant un théorème de régularité, montrer que la solution du problème variationnel est solution de (3.28) en un sens classique.

Problème de Stokes

Le problème de Stokes linéaire est une approximation du problème de Navier-Stokes qui modélise le mouvement d'un fluide (air, eau, huile, ...) dans un corps. Notons $\overrightarrow{u} = (u_1, u_2, u_3)$ la vitesse du fluide (on se place en dimension 3) et p sa pression (toutes deux inconnues), les équations de Navier-Stokes qui régissent le mouvement du fluide dans un corps (ouvert borné lipschitzien) Ω soumis à l'action d'une force extérieure $\overrightarrow{f} = (f_1, f_2, f_3)$ sont alors (on suppose le fluide adhérent au bord du récipient) :

$$(3.29) \qquad \begin{cases} -\mu\Delta u_i + \sum_{j=1}^{3} u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial p}{\partial x_i} = f_i \;\text{ dans } \Omega \;\text{ pour } i = 1,2,3 \\ div\overrightarrow{u} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = 0 \;\text{ dans } \Omega \;\text{ (condition d'incompressibilité)} \\ \overrightarrow{u} = 0 \;\text{ sur } \Gamma = \partial\Omega \end{cases}$$

où μ est une constante de viscosité, caractéristique du fluide. Ce système d'équations est donc non-linéaire du fait de la présence des termes quadratiques en $u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$ et il est hors de portée dans ce chapitre d'aborder la résolution de ce système d'équations. Mais si le mouvement du fluide est très lent, alors chaque composante u_i de la vitesse étant très petite le terme quadratique devient négligeable devant les autres termes et le système d'équations de Navier-Stokes s'approche de manière satisfaisante par le système de Stokes :

$$(3.30) \qquad \begin{cases} -\mu\Delta u_i + \frac{\partial p}{\partial x_i} = f_i \;\text{ dans } \Omega \;\text{ pour } i = 1,2,3 \\ div\overrightarrow{u} = 0 \;\text{ dans } \Omega \\ \overrightarrow{u} = 0 \;\text{ sur } \Gamma = \partial\Omega. \end{cases}$$

Pour trouver la formulation variationnelle du problème de Stokes, on se donne une fonction (ou plutôt un vecteur) $\overrightarrow{v} = (v_1, v_2, v_3) \in [H^1(\Omega)]^3$ avec $\overrightarrow{v} = 0$ sur Γ et on multiplie la i-ème équation (i=1,2,3) par v_i puis on intègre sur Ω et enfin on somme les trois équations. On obtient :

$$-\mu \sum_{i=1}^{3} \int_\Omega \Delta u_i v_i(x)\,dx + \sum_{i=1}^{3} \int_\Omega v_i \frac{\partial p}{\partial x_i}\,dx = \sum_{i=1}^{3} \int_\Omega f_i v_i(x)\,dx. \tag{3.1}$$

On utilise alors la formule de Green, d'une part pour la première intégrale (2ème formule de Green), d'autre part pour la deuxième, celle contenant la pression (1ère formule de Green), l'équation (3.1) devient alors

$$(3.32) \qquad \mu \sum_{i=1}^{3} \int_\Omega \nabla u_i . \nabla v_i(x)\,dx + \sum_{i=1}^{3} \int_\Omega p div\overrightarrow{v}\,dx = \int_\Omega \overrightarrow{f} . \overrightarrow{v}(x)\,dx.$$

Nous choisissons alors de travailler dans l'espace

$$V = \{\overrightarrow{v} \in [H_0^1(\Omega)]^3 \;\text{ tel que }\; div\overrightarrow{v} = 0\}$$

qui est un sous-espace fermé de l'espace de Hilbert $[H_0^1(\Omega)]^3$, sur lequel nous considérons la forme bilinéaire

$$a(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \mu \sum_{i=1}^{3} \int_\Omega \nabla u_i . \nabla v_i(x)\,dx$$

et la forme linéaire

$$F(\overrightarrow{v}) = \int_\Omega \overrightarrow{f}.\overrightarrow{v}(x)\,dx.$$

Dans la formulation variationnelle

$$\text{Trouver } \overrightarrow{u} \in V \text{ tel que } \forall \overrightarrow{v} \in V$$

$$a(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = F(\overrightarrow{v}) \tag{3.33}$$

la pression p a disparu, mais nous verrons ci-dessous comment la "récupérer".

Exercice 3.9 :
Montrer que le problème (3.33) possède une solution unique.

Qu'a-t-on résolu alors ? La possibilité de retrouver les équations de Stokes repose sur un résultat difficile de De Rham :

Proposition 3.7.1 *Soit L une forme linéaire continue sur $[H_0^1(\Omega)]^3$ qui s'annule sur le sous-espace V, alors il existe un élément $\varphi \in L^2(\Omega)$ tel que*

$$\forall \overrightarrow{v} \in [H_0^1(\Omega)]^3 \quad L(\overrightarrow{v}) = \int_\Omega \varphi div(\overrightarrow{v})(x)\,dx$$

et φ est unique à une constante près.

Admettons donc ce résultat et montrons comment on retrouve les équations de Stokes à partir de la formulation variationnelle. Soit donc $u \in V$ la solution de (3.33), alors la forme linéaire L définie sur $[H_0^1(\Omega)]^3$ par

$$L(\overrightarrow{v}) = \sum_{i=1}^{3} \int_\Omega \nabla u_i.\nabla v_i(x)\,dx - \int_\Omega \overrightarrow{f}.\overrightarrow{v}(x)\,dx$$

s'annule par définition sur V et on peut donc lui appliquer la proposition : il existe $p \in L^2(\Omega)$ tel que

$$\sum_{i=1}^{3} \int_\Omega \nabla u_i.\nabla v_i(x)\,dx - \int_\Omega \overrightarrow{f}.\overrightarrow{v}(x)\,dx = \int_\Omega p div(\overrightarrow{v})(x)\,dx. \tag{3.34}$$

Maintenant d'après la formule de Green (et le fait que $\overrightarrow{v}$ s'annule sur Γ)

$$\int_\Omega P div(\overrightarrow{v})(x)\,dx = \sum_{i=1}^{3} \int_\Omega v_i \frac{\partial p}{\partial x_i}\,dx$$

cette relation étant vraie pour toute vecteur $\overrightarrow{v} \in [H_0^1(\Omega)]^3$. En exploitant alors cette relation successivement pour $\overrightarrow{v} = (v_1, 0, 0)$, $\overrightarrow{v} = (0, v_2, 0)$ et $\overrightarrow{v} = (0, 0, v_3)$ avec dans chaque cas $v_i \in \mathcal{D}(\Omega)$, on obtient bien chacune des 3 équations constituant le système de Stokes (au moins au sens des distributions).

Equations de plaques

Tous les exemples que nous avons donnés jusqu'ici avaient en commun de faire intervenir le laplacien qui est un opérateur d'ordre 2 (seules les dérivées secondes interviennent). Or certains problèmes physiques comme celui que nous allons voir maintenant font intervenir un opérateur d'ordre 4, en l'occurrence le bilaplacien $\Delta^2 = \Delta(\Delta)$; Considérons donc une plaque plane ($\Omega \in \mathbb{R}^2$) encastrée sur son pourtour et soumise à une force verticale f ($f(x, y)$ est l'intensité de cette force au point de coordonnées (x, y) de Ω). Notons $u = u(x, y)$ le déplacement (vertical) du point (x, y) de la plaque, alors u se calcule en résolvant l'e.d.p. :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta^2 u = f \ \text{ dans } \Omega \\ u = 0 \ \text{ sur } \partial\Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \ \text{ sur } \partial\Omega \end{array} \right. \tag{3.35}$$

(les conditions au bord : déplacement nul et pente de la plaque horizontale nulle étant les conditions habituelles d'encastrement).
Le bon espace de travail est ici

$$H_0^2(\Omega) = \{v \in H^2(\Omega), v = 0 \ \text{ et } \frac{\partial v}{\partial x_i} = 0 \ \text{ sur } \partial\Omega \text{ pour } i = 1, 2\}.$$

Remarquons que si une fonction est constante sur le bord d'un ouvert (régulier) alors son gradient est colinéaire au vecteur normal,

Exercice 3.10 : Le démontrer

aussi on a l'équivalence

$$v = 0 \ \text{ et } \frac{\partial v}{\partial x_i} = 0 \ \text{ sur } \partial\Omega \text{ pour } i = 1, 2 \iff v = 0 \ \text{ et } \frac{\partial v}{\partial n} = 0 \ \text{ sur } \partial\Omega$$

et donc

$$H_0^2(\Omega) = \{v \in H^2(\Omega), v = 0 \ \text{ et } \frac{\partial v}{\partial n} = 0 \ \text{ sur } \partial\Omega\}.$$

La formulation variationnelle du problème (3.35) est alors

$$\text{Trouver } u \in H_0^2(\Omega) \text{ tel que } \forall v \in H_0^2(\Omega)$$

$$\int_\Omega \Delta u \Delta v(x)\, dx = \int_\Omega f v(x)\, dx \tag{3.36}$$

et je laisse la résolution de ce problème en exercice

Exercice 3.11 :
Montrer qu'il existe une constante C telle que

$$\forall v \in H_0^2(\Omega) \quad \|v\|_{H^2} \leq C \int_\Omega (\Delta v(x))^2\, dx$$

(on pourra utiliser l'inégalité de Poincaré ainsi que la transformée de Fourier en observant que si $v \in H_0^2(\Omega)$, la fonction

$$\tilde{v} = \begin{cases} v(x) & \text{si} \quad x \in \Omega \\ 0 & \text{si} \quad x \notin \Omega \end{cases}$$

est dans $H^2(\mathbb{R}^2)$).
En déduire que le problème (3.36) possède une solution unique.

Exercice 3.12 :
On considère le problème

$$\begin{cases} -u'' + u = f \\ u'(0) - \beta u(0) = 0 \\ u'(1) - \beta u(1) = 0 \end{cases}$$

A quelle condition sur β ce problème admet-il une solution pour toute fonction $f \in L^2(]0,1[)$?

Chapitre 4

Principe du maximum et théorie spectrale

4.1 Le principe du maximum

Reprenons l'exemple de l'équation de la chaleur stationnaire (ou équation de Laplace) évoquée au chapitre 1 et au chapitre 3 :

$$(4.1) \qquad \begin{cases} -\Delta u &= f \text{ dans } \Omega \\ u &= 0 \text{ sur } \partial\Omega \end{cases}$$

où, je le rappelle u représente la température à l'intérieur de la pièce ou du corps Ω tandis que f est la source de chaleur qu'on supposera positive (un radiateur par exemple), la condition au bord signifiant que le bord du corps est, par exemple, plongé dans la glace. Pour des raisons physiques, mais aussi de bon sens, évidentes la température dans le corps est certainement positive et également inférieure au maximum de f (il ne peut pas faire plus chaud dans la pièce que sur le radiateur !). Ces propriétés "physiques" doivent pouvoir s'exprimer et se montrer mathématiquement, c'est ce qu'on appelle le principe du maximum et c'est ce que nous allons énoncer maintenant.

Théorème 4.1 *Soit a une fonction continue positive sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^N$ de bord Γ, $f \in L^2(\Omega)$ et u une fonction de $H^1(\Omega) \cap \mathcal{C}(\bar{\Omega})$ solution de*

$$(4.2) \qquad \int_\Omega \nabla u . \nabla v(x)\, dx + \int_\Omega auv(x)\, dx = \int_\Omega fv(x)\, dx.$$

Alors $u \geq 0$ sur Γ et $f \geq 0$ sur Ω implique $u \geq 0$ sur Ω.
De plus, si $a = 0$ et Ω est borné :

$$f \geq 0 \text{ sur } \Omega \implies u \geq \inf_\Gamma u \text{ sur } \Omega$$

et

$$f = 0 \text{ sur } \Omega \implies \inf_\Gamma u \leq u \leq \sup_\Gamma u \text{ sur } \Omega$$

Démonstration :
Fixons une fonction G de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que

1. G est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$
2. $G(x) = 0$ si $x \in [0, +\infty[$
3. G est strictement croissante sur $]-\infty, 0]$
4. $\forall x \in \mathbb{R},\ |G(x)| \leq |x|$
5. $\forall x \in \mathbb{R},\ |G'(x)| \leq 1$

et posons $v = G(u)$. Alors $v \in H^1(\Omega)$, car

$$|G(u)|^2 \leq u^2 \text{ donc } v \in L^2(\Omega)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x_i} = \frac{\partial u}{\partial x_i} G'(u) \Longrightarrow |\frac{\partial v}{\partial x_i}|^2 \leq |\frac{\partial u}{\partial x_i}|^2 \text{et donc } \frac{\partial v}{\partial x_i} \in L^2(\Omega).$$

On a même $v \in H_0^1(\Omega)$, car si $x \in \Gamma$, $u(x) \geq 0$ par hypothèse et donc $v(x) = 0$, le résultat s'en déduit en utilisant la caractérisation de $H_0^1(\Omega)$ vue au chapitre 2.
Remplaçons alors v par $G(u)$ dans la formulation variationnelle (4.2), on obtient

$$\sum_{i=1}^{N} \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_i} G'(u)\, dx + \int_\Omega a u G(u)\, dx = \int_\Omega f G(u)\, dx.$$

Or $uG(u) \geq 0$ dans Ω de même que a donc

$$\sum_{i=1}^{N} \int_\Omega (\frac{\partial u}{\partial x_i})^2 G'(u)\, dx = \int_\Omega |\nabla u|^2 G'(u)\, dx \leq \int_\Omega f G(u)\, dx \leq 0$$

car $f \geq 0$ et $G(u) \leq 0$ dans Ω. Comme $G'(u) \geq 0$ on en déduit donc que $|\nabla u|^2 G'(u) = 0$ presque partout dans Ω.
Introduisons alors la fonction H définie par

$$H(t) = \int_0^t \sqrt{G'(s)}\, ds.$$

On a $H(t) = 0$ si et seulement si $t \geq 0$ et on montre exactement comme ci-dessus que $H(u) \in H_0^1(\Omega)$.
Mais puisque

$$\frac{\partial H(u)}{\partial x_i} = \frac{\partial u}{\partial x_i} H'(u) = \frac{\partial u}{\partial x_i} \sqrt{G'(u)}$$

on a

$$|\nabla H(u)|^2 = \sum_{i=1}^{N} (\frac{\partial u}{\partial x_i})^2 G'(u) = |\nabla u|^2 G'(u) = 0$$

et donc $H(u) =$ constante. Or $H(u) \in H_0^1(\Omega)$ et donc $H(u) \equiv 0$ ce qui signifie bien que $u \geq 0$ dans Ω.
Plaçons nous maintenant dans le cas $a = 0$ et Ω borné (de sorte que le problème (4.2) possède effectivement une solution unique comme prouvé dans le chapitre précédent).

Posons alors $m = \inf_\Gamma u$, la fonction $u - m \in H^1(\Omega)$ et vérifie la formulation variationnelle (4.2), de plus $u - m \geq 0$ sur Γ et donc, en appliquant le résultat précédent, on en déduit $u - m \geq 0$ dans Ω.
Enfin si $f = 0$, on fait le même raisonnement avec $M - u$ où $M = \sup_\Gamma u$.

Remarque : Si l'ouvert Ω est lipschitzien, on peut se passer de l'hypothèse $u \in \mathcal{C}(\bar{\Omega})$, les valeurs que prend u sur Γ sont alors à comprendre au sens des traces. De même, si $u \in H_0^1(\Omega)$ on n'a pas non plus besoin de l'hypothèse $u \in \mathcal{C}(\bar{\Omega})$ (et ce sans rien supposer sur Ω).

Donnons maintenant une version plus forte du principe du maximum due à Hopf.

Théorème 4.2 *Soit $u \in C^2(\Omega)$ telle que $\Delta u = f$ dans Ω avec f continue et positive. Si u atteint son maximum en un point $x_0 \in \Omega$ alors u est constante dans Ω.*

Ce théorème généralise donc le principe du maximum classique pour les fonctions harmoniques. On peut évidemment énoncer le résultat semblable avec $f \leq 0$ dans Ω. Enfin il est clair que ce théorème contient le précédent (mais avec des hypothèses plus fortes sur la fonction u).

Démonstration :
On raisonne par l'absurde en supposant $u(x) \not\equiv u(x_0) = M$. L'ensemble $\mathcal{O} = \{x \in \Omega,\ u(x) < M\}$ est alors un ouvert de Ω et on peut donc trouver une boule incluse dans $\mathcal{O}$. Plus précisément on va choisir un point x_2 dans Ω et un rayon R tels que la boule $B(x_2, R)$ est incluse dans $\mathcal{O}$ et touche le bord de $\mathcal{O}$ en un point x_1, c'est-à-dire que

$$u(x) < M \quad \text{pour } x \in \overline{B(x_2, R)} - \{x_1\} \quad \text{et} \quad u(x_1) = M.$$

Choisissons alors un rayon $R_1 < R$ tel que $\overline{B(x_1, R_1)} \subset \Omega$ et posons

$$S_i = \overline{B(x_2, R)} \cap \partial B(x_1, R_1) \quad \text{et} \quad S_e = \partial B(x_1, R_1) - \overline{B(x_2, R)}$$

de sorte que $u(x) \leq M - \varepsilon$ sur S_i (pour un certain $\varepsilon > 0$) tandis que $u(x) \leq M$ sur S_e.
Posons alors $h(x) = e^{-\alpha r^2} - e^{-\alpha R^2}$ où $r = |x - x_2|$ et calculons

$$e^{\alpha r^2} \Delta h = e^{\alpha r^2} (\frac{\partial^2 h}{\partial r^2} + \frac{N-1}{r} \frac{\partial h}{\partial r}) = 2\alpha(2\alpha r^2 - N).$$

On choisit alors α assez grand pour que $\Delta h > 0$ dans $\overline{B(x_1, R_1)}$. Enfin remarquons qu'on a aussi

$$h(x) < 0 \quad \text{sur } S_e \quad \text{et} \quad h(x_1) = 0.$$

Posons enfin $v(x) = u(x) + \delta h(x)$ avec $\delta > 0$ sufisamment petit pour que $v(x) < M$ sur S_i. On a clairement $v(x) < M$ sur $\partial B(x_1, R_1)$ avec $v(x_1) = M$ donc v atteint son maximum dans la boule $\overline{B(x_1, R_1)}$ en un point intérieur, mettons x_3. De plus $\Delta v = \Delta u + \delta \Delta h > 0$ dans $\overline{B(x_1, R_1)}$ et en particulier en x_3. Et c'est là qu'est la contradiction : en effet si une fonction de classe C^2 a un maximum local en un point, la forme bilinéaire dérivée seconde est nécessairement négative (on le voit en écrivant le développement de Taylor à l'ordre 2 au point x_3). Or cette forme bilinéaire a pour matrice le Hessien de v (c'est-à-dire la matrice dont le terme général est $\frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j}$) dont la trace est justement le laplacien de v qui est, voir plus haut, strictement positif, ce qui n'est pas possible pour une forme bilinéaire négative (n'oubliez pas que la trace est la somme des valeurs propres).

Je termine en donnant un dernier résultat, celui-là sans démonstration, également dû à E. Hopf

Proposition 4.2.1 *Soit Ω un ouvert de classe C^1 et u une fonction de $H^2(\Omega)$ telle que $\Delta u \geq 0$ au sens des distributions dans Ω. On sait alors, d'après les théorèmes précédents, que le maximum de u est atteint sur le bord : soit x_0 un point de $\partial\Omega$ où u atteint son maximum, alors on a*

$$\frac{\partial u}{\partial n}(x_0) > 0.$$

Le fait que la dérivée normale soit positive ou nulle est évident puisque pour tout $t > 0$ on a

$$u(x_0 - tn) - u(x_0) \leq 0$$

d'où, en divisant par t et en faisant tendre t vers 0 on obtient bien

$$-\frac{\partial u}{\partial n}(x_0) \leq 0.$$

Donc ce qui est important dans cette proposition est évidemment le fait que la dérivée normale est strictement positive.

4.2 Théorie spectrale

Nous avons déjà rencontré, au moins à deux reprises, des valeurs propres du laplacien. Nous allons dans ce paragraphe étudier de manière plus détaillée cette théorie qui a de nombreuses applications, nous en verrons quelques unes.

4.2.1 Rappels

Nous allons tout d'abord rappeler, sans démonstration, quelques résultats généraux sur la théorie spectrale des opérateurs. Je renvoie, pour plus de détails, aux livres classiques comme "Analyse Fonctionnelle" de Brézis ou "Yosida : functional analysis" ou encore "Kato : Perturbation theory for linear operator".

Soit E un espace de Banach et A un opérateur linéaire continu de E dans E. On notera I l'opérateur identité de E dans E. On appelle

- **ensemble résolvant de** A l'ensemble $\mathcal{R}(A) = \{\lambda \in \mathbb{C}; A - \lambda I$ est bijectif de E sur $E\}$
- **spectre de** A, qu'on notera $\sigma(A)$, le complémentaire de l'ensemble résolvant (donc l'ensemble des nombres complexes λ tels que $A - \lambda I$ ne soit pas une bijection)
- **valeur propre de** A tout nombre complexe λ tel que $A - \lambda I$ ne soit pas injectif. Un vecteur u non nul vérifiant alors $Au = \lambda u$ s'appelle un vecteur propre associé à λ. On notera $VP(A)$ l'ensemble des valeurs propres de A.

Il est clair que $VP(A) \subset \sigma(A)$, que ces deux ensembles coïncident en dimension finie mais pas, en général, en dimension infinie. Dans toute la suite on supposera d'ailleurs E de dimension infinie. Examinons maintenant le cas fondamental des opérateurs compacts :

Proposition 4.2.2 *Soit A un opérateur compact de E dans E, alors*

(i) $0 \in \sigma(A)$

(ii) *toute valeur spectrale non nulle est une valeur propre et le sous espace propre associé est de dimension finie*

(iii) *l'ensemble des valeurs propres de A est au plus dénombrable et 0 est son seul point d'accumulation possible*

Enfin terminons par le cas où E est un espace de Hilbert et A un opérateur autoadjoint (c'est-à-dire $(Ax, y) = (x, Ay)\ \forall x, y \in E$). Dans ce cas il est facile de vérifier que toutes les valeurs propres de A sont réelles et que deux vecteurs propres associés à deux valeurs propres distinctes sont orthogonaux. Précisons davantage les résultats dans le cas auto-adjoint compact :

Proposition 4.2.3 *Soit E un espace de Hilbert séparable et A un opérateur auto-adjoint compact de E dans E (non nul). Alors il existe une base hilbertienne (e_n) de E constituée de vecteurs propres de A et, de plus*

$$\forall x \in E, \quad Ax = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n (x, e_n) e_n.$$

4.2.2 Valeurs propres et vecteurs propres du laplacien

Nous allons maintenant appliquer ces résultats au laplacien. Commençons par le cas des conditions de Dirichlet :

Théorème 4.3 *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$. Alors il existe une base hilbertienne $(e_n)_{n\geq 1}$ de $L^2(\Omega)$ et une suite $(\lambda_n)_{n\geq 1}$ de réels positifs avec $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = +\infty$ tels que*

$$e_n \in H_0^1(\Omega) \cap \mathcal{C}^\infty(\Omega)$$

et

$$-\Delta e_n = \lambda_n e_n$$

Les λ_n sont appelés les valeurs propres du laplacien avec condition de Dirichlet et les e_n sont les fonctions propres associées.

démonstration :
Soit $f \in L^2(\Omega)$, on note $u = Af$ l'unique solution dans $H_0^1(\Omega)$ du problème variationnel

$$\forall v \in H_0^1(\Omega) \quad \int_\Omega \nabla u . \nabla v(x)\, dx = \int_\Omega f v(x)\, dx \tag{4.3}$$

(d'après Lax-Milgram). On a ainsi défini une application A de $L^2(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$. Cet opérateur A est **linéaire**, **continu** car

$$\|u\|_{L^2}^2 = \int_\Omega u^2(x)\, dx \leq C^2 \int_\Omega |\nabla u|^2\, dx = C^2 \int_\Omega f u(x)\, dx \leq C^2 \|f\|_{L^2} \|u\|_{L^2} \tag{4.4}$$

la première inégalité étant l'inégalité de Poincaré et la seconde l'inégalité de Cauchy-Schwartz. Il en résulte que

$$\|Af\|_{L^2} \leq C^2 \|f\|_{L^2} \tag{4.5}$$

ce qui signifie bien la continuité de A. De plus A est **auto-adjoint** : soit f_1 et f_2 deux éléments de $L^2(\Omega)$, notons $u_1 = Af_1$ et $u_2 = Af_2$, on a alors, en utilisant (4.4)

$$(Af_1, f_2) = \int_\Omega u_1 f_2(x)\, dx = \int_\Omega \nabla u_1.\nabla u_2(x)\, dx = \int_\Omega f_1 u_2(x)\, dx = (f_1, Af_2).$$

De plus, l'opérateur A est **compact** :
si $\mathcal{B}$ est une partie bornée de $L^2(\Omega)$, i.e. $\forall f \in \mathcal{B}\ \ \|f\|_{L^2} \leq M$, on a grâce à (4.4) et à (4.5)

$$\int_\Omega |\nabla u|^2\, dx \leq C^2 M^2$$

et donc la partie $A(\mathcal{B})$ est bornée dans $H_0^1(\Omega)$. Or l'injection de $H_0^1(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ étant compacte (théorème de Rellich), il en résulte que $A(\mathcal{B})$ est compacte dans $L^2(\Omega)$.
Enfin, il est clair que le noyau de A est réduit à $\{0\}$ et que $\forall f \in L^2(\Omega), f \neq 0$ on a $(Af, f) = \int_\Omega uf(x)\, dx = \int_\Omega |\nabla u|^2\, dx > 0$ et donc toutes les valeurs propres de A sont strictement positives. D'après la proposition, il existe une base hilbertienne de fonctions propres (e_n) et une suite de valeurs propres μ_n tendant vers 0 tels que $Ae_n = \mu_n e_n$, c'est-à-dire

$$\forall v \in H_0^1(\Omega)\ \ \mu_n \int_\Omega \nabla e_n.\nabla v(x)\, dx = \int_\Omega e_n v(x)\, dx$$

ce qui implique en particulier

$$\begin{cases} -\Delta e_n = \frac{1}{\mu_n} e_n \ \ \text{dans } \Omega \\ \qquad e_n \in H_0^1(\Omega) \end{cases}$$

En posant alors $\lambda_n = \frac{1}{\mu_n}$ on a bien le résultat annoncé.
Enfin les théorèmes de régularité vus au paragraphe montrent, par récurrence, que $e_n \in H^k(\omega)$ et ceci pour tout entier k et tout sous-domaine $\omega \subset \Omega$. Comme $\bigcap_{k=1}^\infty H^k = C^\infty$, on en déduit $e_n \in C^\infty(\Omega)$.

Remarques :

- Ce qui a joué un rôle dans la démonstration précédente, et qui est la méthode traditionnelle de preuve dans de nombreuses situations analogues, est la propriété de l'opérateur laplacien d'être **d'inverse auto-adjoint compact**.
- La suite de valeurs propres λ_n ne dépend que de la géométrie du domaine Ω et est très difficile à calculer dans la pratique dans le cas général. C'est seulement pour des ouverts Ω très particuliers que l'on saura déterminer les λ_n explicitement (voir exercice ci-dessous).
- Le théorème que nous venons d'énoncer dans le cas de conditions au bord "Dirichlet homogène" peut également s'énoncer dans le cas d'autres conditions au bord (Neumann, Fourier,...). Par exemple, il existe une suite de réels positifs $0 = \mu_0 < \mu_1 \leq$

$\mu_2 \leq \ldots \leq \mu_n \ldots$ et une suite de fonctions propres f_n (formant une base hilbertienne) telles que

$$\begin{cases} -\Delta f_n &= \mu_n f_n \quad \text{dans } \Omega \\ \frac{\partial f_n}{\partial n} &= 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

on les appellera les valeurs propres et les fonctions propres du laplacien-Neumann.

- On peut également changer l'opérateur, c'est-à-dire qu'au lieu du laplacien on peut considérer un autre opérateur elliptique (cf remarque finale). Un cas particulier important est celui de l'opérateur dit de Schrödinger :$-\Delta + q(x)I$ où $q(x)$ est une fonction de $L^\infty(\Omega)$. Remarquez que s'il est nécessaire de supposer $q \geq 0$ si l'on veut résoudre, par exemple, l'e.d.p. $-\Delta u + q(x)u = f$ avec $u \in H_0^1(\Omega)$ et ce afin que la forme bilinéaire associée à l'équation
$$a(u,v) = \int_\Omega \nabla u.\nabla v(x)\,dx + \int_\Omega quv(x)\,dx$$
soit coercive, il n'y a aucune condition de signe sur q pour le problème de valeurs propres. En effet, puisque il est évidemment équivalent de rechercher les valeurs propres d'un opérateur A ou de l'opérateur $A + kI$ et ce pour tout réel k, on peut toujours choisir k suffisamment grand pour se ramener au cas classique.

Exercice 4.1 : Calculer, en utilisant une méthode de variables séparables (cf chapitre 1), la suite des valeurs propres, avec conditions au bord de Dirichlet et de Neumann, d'un rectangle de $\mathbb{R}^2$ et du disque unité de $\mathbb{R}^2$ (dans ce dernier cas interviennent les fonctions de Bessel et leurs zéros).

Donnons maintenant une application importante (plus d'un point de vue théorique que pratique) de ces résultats. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$ dont on va supposer qu'on connaît **toutes les valeurs propres et tous les vecteurs propres** associées au laplacien-Dirichlet (pour fixer les idées : il apparaîtra clairement que la technique qu'on va développer ici s'applique aux autres types de condition au bord). On notera, comme d'habitude λ_n et e_n les deux suites d'éléments propres. Supposons à présent qu'on souhaite résoudre un problème de Dirichlet :

$$\begin{cases} -\Delta u &= f \quad \text{dans } \Omega \\ u &= 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \tag{4.6}$$

avec $f \in L^2(\Omega)$. Alors la connaissance des λ_n et e_n va nous fournir une méthode très simple de résolution de (4.6), c'est **la méthode de Galerkin** :

Proposition 4.3.1 (Méthode de Galerkin) *Posons*
$$\alpha_n = (f, e_n)_{L^2} = \int_\Omega f e_n(x)\,dx$$
alors
$$u = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{\lambda_n} e_n$$
est l'unique solution de (4.6).

La démonstration est immédiate puisque les e_n formant une base hilbertienne de $L^2(\Omega)$ f est limite dans L^2 de la série $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n\, e_n$. De plus u est bien dans $H_0^1(\Omega)$ puisqu'il est limite d'une suite de fonctions de $H_0^1(\Omega)$ et que celui-ci est fermé.
On comprend bien pourquoi cette méthode ne peut pas être facilement employée dans la pratique, le calcul des λ_n et e_n étant très délicat dans le cas général (c'est exactement comme si on voulait diagonaliser une matrice pour résoudre un système linéaire). Par contre, si les éléments propres sont déjà connus (penser au cas d'un disque ou d'un rectangle, cf exercice) alors la méthode de Galerkin devient effectivement très intéressante car le calcul des α_n est très simple (de surcroît, dans la pratique, on n'a besoin de ne calculer que les premiers car le rapport $\frac{\alpha_n}{\lambda_n}$ peut tendre assez vite vers 0).

Exercice 4.2 : Résoudre, grâce à la méthode de Galerkin, le problème

$$\begin{cases} -\Delta u &= 1 \text{ dans } \Omega \\ u &= 0 \text{ sur } \partial\Omega \end{cases}$$

où Ω est le carré unité de $\mathbb{R}^2$.

4.2.3 Formule de min-max

Nous allons maintenant donner des formules fort utiles qui caractérisent les valeurs propres, qui sont connues sous le nom de formules de max-min de Courant-Fischer. Nous avons déjà vu, dans le chapitre précédent que la première valeur propre du laplacien-Dirichlet pouvait se caractériser comme la solution d'un problème de minimum :

$$\lambda_1 = \inf_{\substack{u\in H_0^1(\Omega)\\ \|u\|_{L^2}=1}} \int_\Omega |\nabla u|^2\,dx = \inf_{\substack{u\in H_0^1(\Omega)\\ u\neq 0}} \frac{\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx}{\int_\Omega u^2(x)\,dx}$$

l'inf étant atteint justement pour $u = e_1$ la fonction propre associée à λ_1. Si l'on veut calculer maintenant, non plus seulement la première valeur propre, mais aussi la deuxième, la troisième, etc...on peut procéder ainsi :
soit L_{k-1} =Vect$[e_1, e_2, \ldots, e_{k-1}]$ le sous-espace vectoriel engendré par les $k-1$ premières fonctions propres. Comme A (l'opérateur inverse du laplacien défini dans la démonstration ci-dessus) laisse invariant L_{k-1} il laisse aussi invariant son orthogonal $L_{k-1}^\perp$ et donc l'opérateur A_1 restriction de A à $L_{k-1}^\perp$ est encore un opérateur continu, auto-adjoint et compact. On peut donc refaire toute la théorie précédente pour A_1 (dont les valeurs propres ne sont autres que $\lambda_k, \lambda_{k+1}, \ldots$. En particulier, si on minimise $\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx$ sur $L_{k-1}^\perp \cap \{u \in H_0^1/\|u\|_{L^2} = 1\}$, on obtiendra (grâce au raisonnement déjà cité du chapitre 2) la plus petite valeur propre de A_1, soit λ_k. On a donc prouvé la formule :

$$\lambda_k = \inf_{\substack{u\in H_0^1(\Omega)\setminus\{0\}\\ u\in[e_1,e_2,\ldots,e_{k-1}]^\perp}} \frac{\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx}{\int_\Omega u^2(x)\,dx}. \tag{4.7}$$

Cette formule (4.7) a cet inconvénient que pour l'utiliser pour calculer la k-ième valeur propre, il est nécessaire de calculer auparavant les k-1 fonctions propres précédentes (et donc aussi les k-1 valeurs propres correspondantes car on ne peut déterminer les fonctions propres sans leur valeur propre). La formule que nous allons voir maintenant ne présente pas cet inconvénient.
Nous noterons, pour tout entier k, $\mathcal{V}_k$ l'ensemble de **tous les sous-espaces de dimension** k de $H_0^1(\Omega)$.

Théorème 4.4 (Formule de max-min de Courant-Hilbert)

$$\lambda_k = \max_{V \in \mathcal{V}_{k-1}} \Big(\min_{\substack{u \in V^\perp \\ \|u\|_{L^2}=1}} \int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx \Big) \tag{4.8}$$

Démonstration :
Puisque $V = L_{k-1}$ est un sous-espace particulier de dimension k-1 et que

$$\lambda_k = \inf_{\substack{u \in L_{k-1}^\perp \\ \|u\|_{L^2}=1}} \int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx$$

on a immédiatement

$$\lambda_k \leq \max_{V \in \mathcal{V}_{k-1}} \Big(\min_{\substack{u \in V^\perp \\ \|u\|_{L^2}=1}} \int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx \Big)$$

(ce qui démontrera au passage que le max est atteint pour $V = L_{k-1}$).
Inversement, soit V un sous-espace de dimension k-1 quelconque. Puisque L_k est de dimension k et $V^\perp$ de codimension k-1, il existe un vecteur $u_0 \in L_k \cap V^\perp$ avec $\|u_0\|_{L^2} = 1$. d'où

$$\inf_{\substack{u \in V^\perp \\ \|u\|_{L^2}=1}} \int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx \leq \int_\Omega |\nabla u_0|^2 \, dx. \tag{4.9}$$

Or, comme $u_0 \in L_k$, il s'écrit

$$u_0 = \sum_{i=1}^k \alpha_i e_i.$$

Notons alors $v_0 = \sum_{i=1}^k \lambda_i \alpha_i e_i$ de sorte que

$$Av_0 = \sum_{i=1}^k \lambda_i \alpha_i A e_i = \sum_{i=1}^k \alpha_i e_i = u_0 \text{ (puisque } Ae_i = \frac{1}{\lambda_i} e_i).$$

Calculons alors $\int_\Omega |\nabla u_0|^2 \, dx$. Par la formule de Green, elle est donnée par

$$\int_\Omega |\nabla u_0|^2 \, dx = (v_0, Av_0) = (v_0, u_0) = \sum_{i=1}^k \lambda_i \alpha_i^2$$

car la base des vecteurs propres est orthonormée. On en déduit immédiatement, les valeurs propres étant rangées dans l'ordre croissant :

$$\int_\Omega |\nabla u_0|^2\,dx \leq \lambda_k \sum_{i=1}^k \alpha_i^2 = \lambda_k \tag{4.10}$$

car $\|u_0\|^2 = \sum_{i=1}^k \alpha_i^2 = 1$. On tire alors de (4.9) et (4.10)

$$\inf_{\substack{u\in V^\perp\\ \|u\|_{L^2}=1}} \int_\Omega |\nabla u|^2\,dx \leq \lambda_k$$

ce qui prouve l'autre inégalité.

On démontrerait exactement de même la formule suivante

Théorème 4.5 (Formule de min-max ou Principe de Poincaré)

$$\lambda_k = \min_{V\in\mathcal{V}_k}\Big(\max_{\substack{u\in V\\ \|u\|_{L^2}=1}} \int_\Omega |\nabla u|^2\,dx\Big)$$

Nous venons de donner la formule de max-min dans le cas du laplacien-Dirichlet, on peut démontrer exactement de la même manière une formule de max-min ou de min-max pour le laplacien avec conditions de Neumann :

$$\mu_k = \max_{V\in\mathcal{W}_{k-1}}\Big(\min_{\substack{u\in V^\perp\\ \|u\|_{L^2}=1}} \int_\Omega |\nabla u|^2\,dx\Big) = \min_{V\in\mathcal{W}_k}\Big(\max_{\substack{u\in V\\ \|u\|_{L^2}=1}} \int_\Omega |\nabla u|^2\,dx\Big) \tag{4.11}$$

où $\mathcal{W}_k$ désigne l'ensemble des sous-espaces vectoriels de $H^1(\Omega)$ de dimension k. De même, on peut aussi donner une formule analogue pour l'opérateur de Schrödinger :

$$\lambda_k = \max_{V\in\mathcal{V}_{k-1}}\Big(\min_{\substack{u\in V^\perp\\ \|u\|_{L^2}=1}} \int_\Omega |\nabla u|^2\,dx + \int_\Omega q u^2(x)\,dx\Big).$$

Une application importante des formules de max-min est la comparaison des valeurs propres pour différents problèmes. Ainsi, il est évident en comparant (4.8) et (4.11) (tout sous-espace de H_0^1 est aussi sous-espace de H^1) qu'on a l'inégalité suivante entre les valeurs propres du laplacien-Dirichlet et du laplacien-Neumann :

$$\forall k \in \mathbb{N} \ \ \mu_k \ \leq \ \lambda_k.$$

De même, soit $\Omega_1 \subset \Omega_2$ deux ouverts de $\mathbb{R}^N$, alors puisque toute fonction de $H_0^1(\Omega_1)$ peut se prolonger (par 0) en une fonction de $H_0^1(\Omega_2)$, l'ensemble des sous-espaces vectoriels de $H_0^1(\Omega_1)$ de dimension k est contenu dans l'ensemble des sous-espaces vectoriels de $H_0^1(\Omega)$ de dimension k. La formule de min-max nous permet alors immédiatement de comparer les valeurs propres (laplacien-Dirichlet) des deux ouverts :

Proposition 4.5.1 *Si $\Omega_1 \subset \Omega_2$, alors, pour tout n*

$$\lambda_n^{(2)} \leq \lambda_n^{(1)}$$

où $\lambda_n^{(1)}$ et $\lambda_n^{(2)}$ désignent bien évidemment les valeurs propres de Ω_1 et Ω_2 respectivement.

On trouvera une autre application, dans le même esprit, dans l'exercice suivant.

Exercice 4.3 : On considère l'opérateur dit de Sturm-Liouville

$$Au = -\frac{d^2}{dx^2}u + q(x)u$$

défini pour $u \in H_0^1(]a,b[)$, où $q \in L^\infty(]a,b[)$
1) Montrer l'existence d'une suite croissante de valeurs propres λ_n et de fonctions propres e_n pour l'opérateur A. Donner un encadrement de λ_1 en fonction de q. Calculer les λ_n dans le cas où q est constant.
2) On se donne dans cette question deux opérateurs A_1 et A_2 correspondant respectivement à des fonctions q_1 et q_2. On note λ_n^1 et λ_n^2 les suite respectives des valeurs propres de A_1 et A_2. On suppose, de plus, que $|q_1(t) - q_2(t)| \leq M$ pour tout $t \in]a,b[$. Montrer que $|\lambda_n^1 - \lambda_n^2| \leq M$ pour tout n.
3) En déduire qu'il existe une constante C telle que

$$|\lambda_n - \frac{n^2\pi^2}{(b-a)^2}| \leq C$$

et donc que la suite des λ_n/n^2 est convergente.

Chapitre 5

Problèmes d'évolution

Les problèmes que nous allons considérer dans ce chapitre dépendent maintenant du temps t. Ils seront donc posés sur un domaine spatio-temporel du type $[0,T] \times \Omega$. De plus, on aura toujours besoin de données initiales afin que le problème soit bien posé. Dans toute la suite, on supposera l'ouvert Ω **borné**.

5.1 Problèmes paraboliques

On va considérer ici le problème modèle qu'est l'équation de la chaleur. On se donne une fonction u_0 définie sur Ω et une fonction $f(t,x)$ (source de chaleur) définie sur $[0,T] \times \Omega$ et il s'agit de trouver une fonction $u(t,x)$ solution de

$$
\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = f & \text{dans }]0,T[\times\Omega \\ u = 0 & \text{sur }]0,T[\times\partial\Omega \\ u(0,x) = u_0(x) & \text{dans } \Omega. \end{cases} \tag{5.1}
$$

Physiquement, la fonction $u(t,x)$, solution du problème (5.1) représente la température au temps t et en un point x d'un corps Ω initialement porté à la température u_0, dont le bord est maintenu à une température de 0 et soumis à la source de chaleur f. Bien entendu, on peut considérer le même type de problème avec d'autres conditions au bord (bord parfaitement isolé, échange de chaleur avec l'extérieur) comme lors du chapitre 3. Commençons, comme nous l'avons fait tout au long du chapitre 3, par écrire une formulation variationnelle du problème (5.1). Pour cela, multiplions l'équation par une fonction test $v \in H_0^1(\Omega)$ et intégrons sur Ω, il vient

$$
\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial t}(t,x)v(x)dx - \int_\Omega \Delta u(t,x)\, v(x)dx = \int_\Omega f(t,x)\, v(x)dx\ .
$$

En utilisant la formule de Green et le fait que (au moins formellement)

$$
\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial t}(t,x)v(x)dx = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}} \int_\Omega u(t,x)v(x)dx
$$

on obtient finalement

$$
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}} \int_\Omega u(t,x)v(x)dx + \int_\Omega \nabla_x u(t,x).\nabla v dx = \int_\Omega f(t,x)\, v(x)dx\ . \tag{5.2}
$$

Pour rechercher la solution u dans les bons espaces, on est conduit à séparer la variable t de la variable x de la façon suivante. On considère que pour tout $t \in [0,T]$ fixé, la fonction $u(t) : x \mapsto u(t,x)$ est définie sur Ω. On identifie ainsi la fonction u avec la fonction $t \longmapsto u(t)$ définie sur $[0,T]$ et à valeurs dans un certain espace de fonctions (par exemple $L^2(\Omega)$) qui sera précisé à chaque fois. Ainsi, on introduit, par exemple, l'espace $L^2(0,T,H_0^1(\Omega))$ qui est l'espace des fonctions $t \longmapsto u(t)$ à valeurs dans $H_0^1(\Omega)$ et de carré intégrable en t. Il est alors muni de la norme :

$$\|u\|_{L^2(0,T,H_0^1(\Omega))} := \left(\int_0^T \|u(t)\|^2_{H_0^1(\Omega)}\,dt\right)^{1/2} .$$

Cette norme en fait un espace de Hilbert, le produit scalaire correspondant étant facile à imaginer. De même, on sera amené à travailler avec l'espace $C^0(0,T,L^2(\Omega))$ des fonctions $t \longmapsto u(t)$ à valeurs dans $L^2(\Omega)$ et continues en la variable t. Cet espace est muni de la norme :

$$\|u\|_{C^0(0,T,L^2(\Omega))} = \max_{t\in[0,T]} \|u(t)\|_{L^2(\Omega)} .$$

On vérifie aisément que cet espace est un espaces de Banach pour la norme ci-dessus définie. Il est clair qu'on peut définir d'autres espaces sur le même modèle en fonction des circonstances. Enfin, on notera $a(u,v)$ la forme bilinéaire correspondant au problème de Dirichlet définie par :

$$a(u,v) = \int_\Omega \nabla u.\nabla v\,dx .$$

Avec toutes ces nouvelles notations, le problème (5.2) peut se réécrire de la façon suivante. Etant donnés $u_0 \in L^2(\Omega)$ et $f \in L^2(0,T,L^2(\Omega))$, on cherche une fonction u telle que

$$u \in L^2(0,T,H_0^1(\Omega)) \cap C^0(0,T,L^2(\Omega)) \tag{5.3}$$

$$\forall v \in H_0^1(\Omega),\quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\,(u(t),v) + a(u(t),v) = (f(t),v) \quad \text{et} \quad u(0) = u_0 . \tag{5.4}$$

L'égalité ci-dessus est à considérer au sens des distributions et les expressions du type (,) désignent comme d'habitude des produits scalaires L^2.
Pour résoudre ce problème, on va procéder par analyse et synthèse. On va tout d'abord chercher une expression possible de la solution et on vérifiera ensuite que cette expression convient bien. Pour cela, il va s'avérer très pratique de travailler dans la base hilbertienne des fonctions propres du Laplacien avec condition de Dirichlet sur l'ouvert Ω introduite au chapitre précédent. Nous noterons donc $0 < \lambda_1 \le \lambda_2 \le \ldots$ les valeurs propres et $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ les fonctions propres associées formant une base hilbertienne de $L^2(\Omega)$.

Analyse

Proposition 5.0.2 *Si u est solution du problème (5.3), (5.4) alors elle est donnée par le développement en série*

$$u(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left((u_0,\varphi_n)e^{-\lambda_n t} + \int_0^t (f(s),\varphi_n)\,e^{-\lambda_n(t-s)}\,ds\right)\varphi_n . \tag{5.5}$$

En particulier, si u existe elle est unique.

Démonstration : Soit u une solution du problème. Pour tout $t \in [0,T]$, $u(t)$ étant une fonction de $L^2(\Omega)$, elle se développe dans la base hilbertienne des φ_n :

$$u(t) = \sum_{n=1}^{\infty} (u(t), \varphi_n)\, \varphi_n \,.$$

Comme de plus, $u(t) \in H_0^1(\Omega)$ on a par formulation variationnelle du problème de valeurs propres :

$$a(u(t), \varphi_n) = \lambda_n (u(t), \varphi_n) \,.$$

Posons $\alpha_n(t) = (u(t), \varphi_n)$. En remplaçant v par φ_n dans (5.4) et en identifiant par unicité du développement dans la base hilbertienne, on obtient que α_n est solution de l'équation différentielle

$$\begin{cases} \alpha_n'(t) + \lambda_n \alpha_n(t) = (f(t), \varphi_n) \\ \alpha_n(0) = (u_0, \varphi_n) \end{cases}$$

dont la solution n'est autre que

$$\alpha_n(t) = (u_0, \varphi_n) e^{-\lambda_n t} + \int_0^t (f(s), \varphi_n)\, e^{-\lambda_n (t-s)}\, ds$$

d'où le résultat.

<u>Synthèse</u>

Théorème 5.1 *La série donnée en (5.5) converge pour tout $u_0 \in L^2(\Omega)$ et $f \in L^2(0,T,L^2(\Omega))$ et sa somme est solution du problème (5.3), (5.4).*

Démonstration : Considérons les sommes partielles de la série

$$u_m(t) = \sum_{n=1}^{m} \left((u_0, \varphi_n) e^{-\lambda_n t} + \int_0^t (f(s), \varphi_n)\, e^{-\lambda_n (t-s)}\, ds \right) \varphi_n \,.$$

On va montrer que u_m est une suite de Cauchy à la fois dans $L^2(0,T,H_0^1(\Omega))$ et dans $C^0(0,T,L^2(\Omega))$. Tout d'abord, il est immédiat de vérifier, en utilisant les relations existant entre les fonctions propres, que u_m vérifie, pour toute fonction propre φ_n avec $n \leq m$, la relation

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}} (u_m(t), \varphi_n) + a(u_m(t), \varphi_n) = (f(t), \varphi_n) \,. \tag{5.6}$$

Soit alors deux entiers m et p avec $p > m$. Puisque, les φ_n forment une famille orthonormée dans $L^2(\Omega)$, on a en norme L^2 :

$$|u_p(t) - u_m(t)| = \left(\sum_{i=m+1}^{p} \left[(u_0, \varphi_i) e^{-\lambda_i t} + \int_0^t (f(s), \varphi_i)\, e^{-\lambda_i (t-s)}\, ds \right]^2 \right)^{1/2} \,.$$

De l'inégalité de Cauchy-Schwarz discrète, on déduit :

$$|u_p(t) - u_m(t)| \leq \left(\sum_{i=m+1}^{p} (u_0, \varphi_i)^2 e^{-2\lambda_i t} \right)^{1/2} + \left(\sum_{i=m+1}^{p} \left[\int_0^t (f(s), \varphi_i)\, e^{-\lambda_i (t-s)}\, ds \right]^2 \right)^{1/2} \,.$$

On utilise maintenant l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour l' intégrale, ce qui donne

$$\left(\int_0^t (f(s),\varphi_i)\, e^{-\lambda_i(t-s)}\, ds\right)^2 \leq \left(\int_0^t (f(s),\varphi_i)^2\, ds\right)\left(\int_0^t e^{-2\lambda_i(t-s)}\, ds\right) = \frac{1}{2\lambda_i}\int_0^t (f(s),\varphi_i)^2\, ds\,.$$

Ceci fournit finalement

$$(5.7)\quad \sup_{t\in[0,T]} |u_p(t)-u_m(t)| \leq \left(\sum_{i=m+1}^{p} (u_0,\varphi_i)^2\right)^{1/2} + \left(\frac{1}{2\lambda_1}\sum_{i=m+1}^{p}\int_0^T (f(s),\varphi_i)^2\, ds\right)^{1/2}.$$

Maintenant, les deux séries suivantes

$$|u_0|^2 = \sum_{n=1}^{\infty}(u_0,\varphi_n)^2$$

$$\|f\|_{L^2(O,T,L^2(\Omega))} = \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^T (f(s),\varphi_n)^2\, ds$$

étant toutes deux convergentes, on peut rendre leurs sommes partielles de $m+1$ à p arbitrairement petites. Il en résulte d'après (5.7) que la suite u_m est une suite de Cauchy dans $C^0(0,T,L^2(\Omega))$.

Par ailleurs, on sait que les fonctions propres φ_n sont non seulement orthogonales pour le produit scalaire L^2, mais également pour la forme bilinéaire $a(.,.)$. Plus précisément $a(\varphi_i,\varphi_j) = \lambda_i\delta_{ij}$. En utilisant ces relations et en développant $a(u_p-u_m,u_p-u_m)$, on en déduit :

$$a(u_p-u_m,u_p-u_m) = \sum_{i=m+1}^{p} \lambda_i (u_p(t)-u_m(t),\varphi_i)^2 =$$

$$= \sum_{i=m+1}^{p} \lambda_i \left((u_0,\varphi_i)e^{-\lambda_i t} + \int_0^t (f(s),\varphi_i)\, e^{-\lambda_i(t-s)}\, ds\right)^2.$$

On utilise maintenant le fait que la forme bilinéaire $a(.,.)$ est coercive dans H_0^1 : $\|u_p(t)-u_m(t)\|_{H_0^1} \leq \frac{1}{\alpha}\, a(u_p-u_m,u_p-u_m)$, ce qui avec l'inégalité entre nombres réels $(a+b)^2 \leq 2(a^2+b^2)$ fournit

$$\|u_p(t)-u_m(t)\|^2_{H_0^1} \leq \frac{2}{\alpha}\sum_{i=m+1}^{p} \lambda_i \left((u_0,\varphi_i)^2 e^{-2\lambda_i t} + \left(\int_0^t (f(s),\varphi_i)\, e^{-\lambda_i(t-s)}\, ds\right)^2\right).$$

On veut la norme dans $L^2(0,T,H_0^1(\Omega))$, donc on intègre l'inégalité précédente entre 0 et T. On a d'une part

$$\lambda_i \int_0^T e^{-2\lambda_i t}\, dt = \frac{1}{2}\,(1-e^{-2\lambda_i T}) < \frac{1}{2}$$

et d'autre part, par Cauchy-Schwarz :

$$\lambda_i\left(\int_0^t (f(s),\varphi_i)\, e^{-\lambda_i(t-s)}\, ds\right)^2 \leq \int_0^t (f(s),\varphi_i)^2 ds\ .\ \lambda_i\int_0^t e^{-2\lambda_i(t-s)}\, ds \leq \frac{1}{2}\int_0^T (f(s),\varphi_i)^2 ds$$

d'où, en intégrant entre 0 et T :

$$\lambda_i \int_0^T \left(\int_0^t (f(s), \varphi_i)\, e^{-\lambda_i(t-s)}\, ds \right)^2 dt \leq \frac{T}{2} \int_0^T (f(s), \varphi_i)^2\, ds \,.$$

En sommant, on a donc

$$\int_0^T \|u_p(t) - u_m(t)\|^2_{H_0^1} \leq \frac{1}{\alpha} \sum_{i=m+1}^{p} \left((u_0, \varphi_i)^2 + T \int_0^T (f(s), \varphi_i)^2\, ds \right) \,.$$

On conclut alors exactement comme ci-dessus que la suite u_n est une suite de Cauchy dans $L^2(0,T,H_0^1(\Omega))$. La suite u_m est donc convergente dans chacun des espaces. Comme ceux-ci s'injectent continûment dans $L^2(0,T,L^2(\Omega))$ par exemple, la limite est la même. Notons la u. Il s'agit maintenant de vérifier que u est solution de l'équation de la chaleur. Soit ψ une fonction fixée dans $\mathcal{D}(]0,T[)$. Grâce à (5.6), on a pour toute fonction propre φ_n également fixée :

$$-\int_0^T (u_m(t), \varphi_n) \frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{dt}}\, dt + \int_0^T a(u_m(t), \varphi_n)\psi(t)\, dt = \int_0^T (f(t), \varphi_n)\psi(t)\, dt \,.$$

En passant à la limite en m, on en déduit :

$$-\int_0^T (u(t), \varphi_n) \frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{dt}}\, dt + \int_0^T a(u(t), \varphi_n)\psi(t)\, dt = \int_0^T (f(t), \varphi_n)\psi(t)\, dt \,.$$

Comme les φ_n forment une base hilbertienne, la relation précédente a lieu en fait pour toutes les fonctions de $L^2(\Omega)$, ce qui indique que u vérifie l'équation au sens des distributions. Enfin, pour la condition initiale, on a puisque u_m converge vers u dans $C^0(0,T,L^2(\Omega))$,

$$u_m(0) \longrightarrow u(0) \quad \text{dans } L^2(\Omega) \,.$$

Comme d'autre part,

$$u_m(0) = \sum_{n=1}^{m} (u_0, \varphi_n)\, \varphi_n \longrightarrow u_0 \quad \text{dans } L^2(\Omega)$$

on a bien $u(0) = u_0$, ce qui achève la preuve du Théorème.

On peut déduire aisément du développement en série de la fonction u la majoration suivante qu'on peut voir comme un résultat de continuité de la solution par rapport aux données u_0 et f :

Proposition 5.1.1 *La solution u du problème (5.3), (5.4) vérifie l'inégalité en norme L^2 :*

$$|u(t)| \leq |u_0| e^{-\lambda_1 t} + \int_0^t |f(s)|\, e^{-\lambda_1(t-s)}\, ds \quad \textit{pour tout } t \in [0,T] \tag{5.8}$$

où λ_1 est la première valeur propre du Laplacien-Dirichlet.

5.2 Problèmes hyperboliques

On va suivre exactement le même plan qu'à la section précédente. On va considérer ici le problème modèle qu'est l'équation des ondes. On se donne deux fonctions u_0 et u_1 définies sur Ω et une fonction $f(t,x)$ définie sur $[0,T] \times \Omega$ et il s'agit de trouver une fonction $u(t,x)$ solution de

$$\text{(5.9)} \qquad \begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = f & \text{dans }]0,T[\times\Omega \\ u = 0 & \text{sur }]0,T[\times\partial\Omega \\ u(0,x) = u_0(x) \quad \text{et } \frac{\partial u}{\partial t}(0,x) = u_1(x) & \text{dans } \Omega. \end{cases}$$

Physiquement, la fonction $u(t,x)$, solution du problème (5.9) représente le (petit) déplacement au temps t du point x d'un corps Ω soumis à une force extérieure $f(t,x)$ sachant que le déplacement initial est donné par u_0, la vitesse initiale est u_1 et le bord du corps Ω est fixé. Bien entendu, on peut considérer le même type de problème avec d'autres conditions au bord (bord libre par exemple) comme lors du chapitre 3.

Commençons, là aussi, par écrire une formulation variationnelle du problème (5.9). Pour cela, multiplions l'équation par une fonction test $v \in H_0^1(\Omega)$ et intégrons sur Ω, il vient

$$\int_\Omega \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t,x)\, v(x) dx - \int_\Omega \Delta u(t,x)\, v(x) dx = \int_\Omega f(t,x)\, v(x) dx\ .$$

En utilisant la formule de Green et le fait que (au moins formellement)

$$\int_\Omega \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t,x) v(x) dx = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} \int_\Omega u(t,x) v(x) dx$$

on obtient finalement

$$\text{(5.10)} \qquad \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} \int_\Omega u(t,x) v(x) dx + \int_\Omega \nabla_x u(t,x).\nabla v dx = \int_\Omega f(t,x)\, v(x) dx\ .$$

Comme dans la section précédente, le problème (5.10) peut se réécrire de la façon suivante. Etant donnés $u_0 \in H_0^1(\Omega)$, $u_1 \in L^2(\Omega)$ et $f \in L^2(0,T,L^2(\Omega))$, on cherche une fonction u telle que

$$\text{(5.11)} \qquad u \in C^0(0,T,H_0^1(\Omega)) \cap C^1(0,T,L^2(\Omega))$$

$$\text{(5.12)} \quad \forall v \in H_0^1(\Omega),\ \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}(u(t),v) + a(u(t),v) = (f(t),v) \quad \text{et} \quad u(0) = u_0\ ,\ \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(0) = u_1\ .$$

L'égalité ci-dessus est à considérer au sens des distributions et les expressions du type (,) désignent comme d'habitude des produits scalaires L^2.

On introduit, là encore les fonctions propres du Laplacien avec condition de Dirichlet sur l'ouvert Ω. Nous noterons $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots$ les valeurs propres et $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ les fonctions propres associées formant une base hilbertienne de $L^2(\Omega)$. On posera, pour tout entier k, $\omega_k = \sqrt{\lambda_k}$. Comme précédemment, on commence par montrer

Proposition 5.1.2 *Si u est solution du problème (5.11), (5.12) alors elle est donnée par le développement en série*

$$u(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \Big((u_0, \varphi_n) \cos(\omega_n t) + \frac{1}{\omega_n} (u_1, \varphi_n) \sin(\omega_n t) + \tag{5.13}$$
$$+ \frac{1}{\omega_n} \int_0^t (f(s), \varphi_n) \sin(\omega_n (t-s))\, ds \Big) \varphi_n \, .$$

En particulier, si u existe elle est unique.

Démonstration : Adapter la démonstration de la Proposition 5.0.2.

De même, l'existence se prouve en vérifiant que la série définie en (5.13) converge et que sa limite convient :

Théorème 5.2 *La série donnée en (5.13) converge pour tout $u_0 \in H_0^1(\Omega)$, $u_1 \in L^2(\Omega)$ et $f \in L^2(0, T, L^2(\Omega))$ et sa somme est solution du problème (5.11), (5.12).*

Démonstration : Je la laisse au lecteur, il s'agit évidemment de s'inspirer de celle du Théorème 5.1.

Enfin, on peut déduire aisément du développement en série de la fonction u la majoration suivante qu'on peut voir comme un résultat de continuité de la solution par rapport aux données u_0, u_1 et f :

Proposition 5.2.1 *La solution u du problème (5.11), (5.12) vérifie l'inégalité :*

$$\left\{ a(u(t), u(t)) + |\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{dt}}(t)|^2 \right\}^{1/2} \leq \left\{ a(u_0, u_0) + |u_1|^2 \right\}^{1/2} + \int_0^t |f(s)|\, ds \quad \textit{pour tout } t \in [0, T] \, .$$

En particulier, si $f = 0$, on a l'égalité de l'énergie :

$$a(u(t), u(t)) + |\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{dt}}(t)|^2 = a(u_0, u_0) + |u_1|^2 \, .$$