École des Mines de Nancy
2017-2018
Mathématiques

Analyse numérique: Test 1 - sujet A

(durée du test: 2h)

- *Le polycopié du cours et les notes de TD sont autorisés à l'exclusion de tout autre document. Vous pouvez réutiliser vos fonctions Matlab créées en TD.*
- *Durant la première heure, on travaillera uniquement sur feuille: les ordinateurs resteront éteints. Durant la seconde heure, seul Matlab sera ouvert sur votre session: en particulier tout accès à Internet (navigateur, mail...) est interdit.*
- *A la fin de la séance, vous rendez votre copie et vous envoyez à l'adresse notée au tableau vos fonctions Matlab. Chaque fonction Matlab que vous créez sera nommée exoN_ Nom.m où N est le numéro de l'exercice et Nom votre nom de famille.*
- *Les quatre exercices sont indépendants et peuvent être faits dans un ordre quelconque. Quand la question est précédée de* **t** *il s'agit d'une question théorique, quand elle est précédée de* **m** *il s'agit d'une question Matlab.*

Exercice 1:
On considère l'équation différentielle

$$\begin{cases} y' + ty^2 = 1 \\ y(0) = 0 \ . \end{cases} \tag{1}$$

qu'on souhaite résoudre numériquement par la méthode de Crank-Nicholson à pas constant h.
t 1) Écrire la formule de Crank-Nicholson pour cette équation. Résoudre l'équation du second degré correspondante pour avoir directement y_{n+1} en fonction de y_n, n, h.
m 2) Programmer votre formule de la question 1) dans Matlab pour calculer une valeur approchée de $y(1)$. Comparer avec ce que donne *ode23*.

Exercice 2:
On considère la matrice

$$A_0 = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

t 1) Montrer que A_0 est symétrique définie positive.
t 2) Calculer $\|A_0\|_\infty$ et montrer que le rayon spectral de A_0 vérifie $\rho(A_0) \leq 9$.
t 3) Montrer que pour toute matrice A et pour toute norme matricielle, on a $\rho(A) \leq \|A\|$.
t 4) Montrer que la méthode de Jacobi pour résoudre un système $A_0X = b$ va converger et que le rayon spectral de la matrice $J = D^{-1}(E + F)$ vérifie $\rho(J) \leq 4/5$.
m 5) Programmer la méthode de Jacobi pour résoudre le système $A_0X = ones(3, 1)$. Combien d'itérations sont nécessaires pour avoir la solution avec une précision de $\varepsilon = 1E - 8$?

Exercice 3:
Soit p un réel, $p \geq 2$.
t 1) Montrer que l'équation

$$x^p - x - 2 = 0$$

a une unique solution, qu'on notera x_p^* sur $\mathbb{R}_+$. Montrer que $x_p^* \in [1,2]$.
t 2) On considère l'algorithme de point fixe $x_{n+1} = x_n^p - 2$. avec $x_0 = 1$. Montrer que cet algorithme ne convergera pas et ce, pour tout $p \geq 2$.
t 3) On envisage une méthode de relaxation pour faire converger l'algorithme. Montrer que quand $p \to +\infty$, $x_p^* \to 1$. Montrer que $\alpha = -3p$ est un bon choix du paramètre de relaxation pour p grand.
m 4) Programmer votre méthode de point fixe relaxée ainsi que la méthode de Newton. Combien d'itérations sont nécessaires pour avoir la solution avec une précision de $\varepsilon = 1E-8$ pour chacune des méthodes?

Exercice 4:
On veut fabriquer une boîte ayant la forme d'un cylindre (avec un fonds) et d'un cône par dessus, comme sur le dessin ci-contre. On note R le rayon de la base, H la hauteur du cylindre et h la hauteur du cône.

m ICI je ferai un beau dessin de la boîte (maintenant si l'un d'entre vous sait faire des beaux dessins et que ça me fait gagner du temps, je suis preneur!)

t 1) *première rédaction* Montrer que le volume V de la boîte et sa surface latérale S sont donnés par:

$$V = \pi R^2 \left(H + \frac{h}{3} \right), \qquad S = 2\pi RH + \pi R^2 + \pi R\sqrt{R^2 + h^2}.$$

t 1) *deuxième rédaction possible* Calculer le volume V de la boîte et sa surface latérale S. On rappelle que le volume du cône est donné par $\pi R^2(\frac{h}{3})$ et sa surface latérale par $\pi R\sqrt{R^2 + h^2}$. **t** 2) On veut fabriquer une boîte contenant un volume V_0 avec le minimum de matériau, donc avec une surface minimale. Écrire les conditions d'optimalité satisfaites par le minimum à l'aide d'un multiplicateur de Lagrange (on admettra l'existence d'un minimiseur).
t 3) Résoudre le système obtenu à la question précédente.
m 4) Résoudre aussi numériquement le système à l'aide de la fonction *fmincon* de Matlab en prenant $V_0 = 1m^3$.