École des Mines de Nancy
2017-2018
Mathématiques

Analyse numérique: Test 2 - corrigé

(durée du test: 2h)

Exercice 1:
On considère l'équation différentielle

$$\begin{cases} y' + ty^2 = 1 \\ y(0) = 0\ . \end{cases} \tag{1}$$

qu'on souhaite résoudre numériquement par la méthode de Crank-Nicholson à pas constant h.
sur 2pt 1) Ici $f(t,y) = 1 - ty^2$ (ou $t + ty^2$). La formule de Crank-Nicholson s'écrit (sujet A):

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}\left(1 - nhy_n^2 + 1 - (n+1)hy_{n+1}^2\right)$$

En résolvant en y_{n+1} on obtient (on choisit la racine proche de y_n pour h petit):

$$y_{n+1} = \frac{-1 + \sqrt{1 - 2(n+1)h^2(nhy_n^2 - y_n - h)}}{(n+1)h^2}.$$

sur 2pt 2) code Matlab.

Exercice 2:
On considère la matrice

$$A_0 = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

sur 1pt 1) Il suffit de constater que A_0 est à dominante diagonale stricte.
sur 2pt 2) $\|A_0\|_\infty = 9$ et le Théorème d'Hadamard-Gershgörin nous dit que les valeurs propres sont toutes dans le disque centré en 5 et de rayon 4: le rayon spectral est donc plus petit que 9. Remarque: je propose de mettre les points aussi à ceux qui utilisent la question 3 ici (même s'ils ne savent pas faire la question 3).
sur 1,5pt 3) on prend X vecteur propre et λ valeur propre associée:

$$|\lambda|\|x\| = \|Ax\| \leq \|A\|\|x\| \Rightarrow |\lambda| \leq \|A\|$$

d'où le résultat.
sur 2pt 4) On a ici

$$J = D^{-1}(E+F) = \begin{pmatrix} 0 & -1/2 & -1/4 \\ -2/5 & 0 & -2/5 \\ -1/4 & -1/2 & 0 \end{pmatrix} \quad \left(= \begin{pmatrix} 0 & -1/3 & -1/3 \\ -1/6 & 0 & -1/3 \\ -1/4 & -1/2 & 0 \end{pmatrix} \text{ pour sujet B}\right)$$

et en appliquant la question 3 on voit que $\rho(J) \leq \|J\|_\infty = 4/5$ (3/4 pour le sujet B) d'où le résultat.
sur 1,5pt 5) question Matlab

Exercice 3:

Soit p un réel, $p \geq 2$.

sur 1,5pt 1) Un simple tableau de variations fournit le résultat et comme $f(x) = x^p - x - 2$ vaut -2 en $x = 1$ et $2^p - 4 \geq 0$ en $x = 2$ on a le résultat.

sur 1pt 2) On a $g(x) = x^p - 2$ et $g'(x_p^*) = p{x_p^*}^{p-1} \geq p - 1 \geq 1$ sur $[1, 2]$ donc l'algorithme ne peut pas converger.

sur 2pt 3) On peut calculer par exemple

$$f\left(1 + \frac{2}{p}\right) = \left(1 + \frac{2}{p}\right)^p - 3 - \frac{2}{p}$$

qui tend vers $e^2 - 3 > 0$ et est donc positif pour p grand (en fait c'est positif pour tout p). On a donc $x_p^* < 1 + 2/p$.

La méthode de relaxation conduit à considérer une fonction G_α définie par $G_\alpha(x) = (\alpha x + g(x))/(\alpha + 1)$ et donc $G'_\alpha(x^*) = (\alpha + p{x_p^*}^{p-1})/(\alpha + 1)$. Si on prend $\alpha = -3p$ on doit vérifier que

$$\left|\frac{-3p + px_p^*}{-3p + 1}\right| < 1$$

sur l'intervalle $[1, 2]$ ce qui est facile.

m sur 1,5pt) question Matlab

Exercice 4:

sur 1,5pt 1) Le volume du cylindre est (base*hauteur) $\pi R^2 H$ tandis que le volume du cône est (base*hauteur/3) $\pi R^2 h/3$.

La surface latérale du cylindre (cela donne un rectangle quand on le développe) $2\pi RH$, la surface de la base est πR^2, enfin la surface du cône est $\pi R\sqrt{R^2 + h^2}$ car quand on le développe, on obtient un secteur circulaire de rayon $\sqrt{R^2 + h^2}$ et dont la longueur de l'arc est le périmètre de la base, soit $2\pi R$ (et le lien entre surface et longueur d'un secteur circulaire est Surface=Rayon*Longueur/2).

sur 1,5pt 2) Les conditions d'optimalité vont s'écrire: il existe un multiplicateur de Lagrange μ tel que $\nabla S = \mu \nabla V$ soit le système:

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2\pi R & = & \mu\pi R^2 \\ \dfrac{\pi R h}{\sqrt{R^2 + h^2}} & = & \mu\frac{\pi R^2}{3} \\ 2\pi H + 2\pi R + \pi\sqrt{R^2 + h^2} + \dfrac{\pi R^2}{\sqrt{R^2 + h^2}} & = & 2\mu\pi R\left(H + \frac{h}{3}\right) \end{array}\right.$$

sur 1,5pt 3) La première équation fournit la valeur de μ: $\mu = 2/R$. En remplaçant dans la deuxième on trouve h en fonction de R: $h = 2R/\sqrt{5}$ et $\sqrt{R^2 + h^2} = 3R/\sqrt{5}$.

En remplaçant alors dans la 3ème équation, on obtient la relation suivante:

$$2H + 2R + \frac{3}{\sqrt{5}}R + \frac{5}{3}R = 4\left(H + \frac{2}{3\sqrt{5}}R\right)$$

ce qui fournit $H = \left(1 + \frac{\sqrt{5}}{5}\right)R$. On trouve la valeur précise de R en utilisant la cotrainte de volume.

sur 1,5pt 4) question Matlab