Ecole des Mines de Nancy
13 Janvier 2016
Mathématiques : Tronc commun 1A

Analyse numérique : Test 2 - sujet XX
(durée du test : 2h)

- *Le polycopié du cours et les notes de TD sont autorisés à l'exclusion de tout autre document. Vous pouvez réutiliser vos fonctions Matlab créées en TD.*
- *Durant la première heure, on travaillera uniquement sur feuille : les ordinateurs resteront éteints. On pourra écrire sur la feuille les algorithmes ou fonctions Matlab qui seront codés dans la suite. Durant la seconde heure, seul Matlab sera ouvert sur votre session : en particulier tout accès à Internet (navigateur, mail...) est interdit.*
- *A la fin de la séance, vous rendez votre copie et vous envoyez à l'adresse notée au tableau vos fonctions Matlab.* **Il est indispensable de nommer (et de sauvegarder) vos fonctions Matlab** *exoN_ votrenom.m* **où N est le numéro de l'exercice**. *Si vous préférez, vous pouvez créer un dossier ou répertoire par exercice nommé exoN_ votrenom dans lequel vous mettres toutes vos fonctions de l'exercice*
- *Les quatre exercices sont indépendants et peuvent être faits dans un ordre quelconque. La mention* **t** *indique qu'il s'agit d'une question théorique, la mention* **m** *d'une question où il s'agit d'écrire un petit programme Matlab.*

Exercice 1 : Soit la fonction $F(x,y) = \frac{5}{2}\,x^2 + y^2 - 4xy$ et l'ensemble $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, y^2 \leq x, x \leq 1\}$.
1) **t** Dessiner l'ensemble E et montrer que F possède un minimum sur E.
2) **t** Déterminer ce minimum en utilisant les conditions de Kuhn-Tucker.

Exercice 2 :
1) **t** Vérifier que la fonction $f(x) = x^3 - 2x + \frac{1}{3}$ a exactement deux racines positives, l'une notée x_1^* entre $\frac{1}{6}$ et $\frac{1}{2}$, l'autre notée x_2^* entre 1 et 2.
2) **t** On envisage la méthode de point fixe

$$x_{n+1} = g(x_n) = x_n^3 - x_n + \frac{1}{3}$$

pour calculer ces racines.
a) Si on choisit $x_0 = 1/4$, cette méthode va-t-elle converger vers x_1^* ?
b) Si on choisit $x_0 = 3/2$, cette méthode va-t-elle converger vers x_2^* ?
3) **m** Programmer cette méthode de point fixe en définissant une fonction Matlab exo2_votrenom.m qui prend en entrée x_0 et qui fournit en sortie le résultat et le nombre d'itérations. Combien d'itérations sont nécessaires pour obtenir x_1^* avec une précision de $1E-8$ en partant de $x_0 = 1/4$?
4) **t** On souhaite accélérer la convergence par la méthode de relaxation qui consiste à écrire le schéma de point fixe $x_{n+1} = (g(x_n) + \alpha x_n)/(1+\alpha)$ pour un certain α. Que proposez-vous comme valeur de α pour rendre cet algorithme convergent vers x_2^* ?

Exercice 3 : Soit A la matrice $A = \begin{pmatrix} 10 & 9 \\ 9 & 8 \end{pmatrix}$.
1) **t** Si on veut utiliser une méthode de Jacobi pour résoudre un système $AX = b$, est-ce que la méthode va converger ?
2) **t** Quel est le conditionnement de la matrice A pour la norme infinie ?
3) **t** On veut améliorer le conditionnement en multipliant la première ligne par un nombre fixe x. On note A_x la matrice $A_x = \begin{pmatrix} 10x & 9x \\ 9 & 8 \end{pmatrix}$ et on continue à travailler avec la norme infinie.

a) Est-ce que cette transformation va rendre la méthode de Jacobi convergente ?
b) Calculer le conditionnement de A_x pour $x \geq 1$. Est-ce qu'on améliore vraiment le conditionnement ?
c) Calculer le conditionnement de A_x pour $x = -1$. Est-ce qu'on améliore le conditionnement ?
d) (cette question peut etre faite théoriquement ou avec Matlab) Quelle valeur de x minimise le conditionnement de A_x ?

Exercice 4 : On souhaite résoudre l'équation du pendule :

$$\begin{cases} y''(t) = \cos y(t), \ t \in (0,1) \\ y(0) = y(1) = 0 \end{cases} \tag{1}$$

1) On va d'abord essayer une méthode de tir en cherchant un réel a tel que la solution y_a de

$$\begin{cases} y_a''(t) = \cos y_a(t), \ t \in (0,1) \\ y_a(0) = 0 \\ y_a'(0) = a \end{cases} \tag{2}$$

vérifie $y_a(1) = 0$.
a) **t** Écrire l'équation (2) comme un système d'équations du premier ordre.
b) **m** Écrire une fonction Matlab exo4a_votrenom.m qui prend en entrée a et renvoie en sortie $y_a(1)$ (on pourra résoudre l'équation différentielle (2) grace à ode23 ou ode45).
c) **m** Écrire une méthode de la sécante pour résoudre l'équation $y_a(1) = 0$ et la programmer à l'aide d'une fonction Matlab exo4b_votrenom.m. Que trouvez-vous comme valeur pour a ?

2) On va maintenant utiliser une méthode de différences finies et on cherchera à résoudre le système non linéaire par une méthode de Newton.
a) **t** Écrire le système non linéaire obtenu en discrétisant (1) par la méthode des différences finies.
b) **m** Calculer explicitement la matrice jacobienne et programmer la méthode de Newton à l'aide d'une fonction Matlab exo4c_votrenom.m où l'entrée sera le pas h de la subdivision.