Ecole des Mines de Nancy
2015-2016
Mathématiques

Analyse numérique: Test 1 - sujet B

(durée du test: 2h)

- *Le polycopié du cours et les notes de TD sont autorisés à l'exclusion de tout autre document. Vous pouvez réutiliser vos fonctions Matlab créées en TD.*
- *Durant la première heure, on travaillera uniquement sur feuille: les ordinateurs resteront éteints. Durant la seconde heure, seul Matlab sera ouvert sur votre session: en particulier tout accès à Internet (navigateur, mail...) est interdit.*
- *A la fin de la séance, vous rendez votre copie et vous envoyez à l'adresse notée au tableau vos fonctions Matlab. Chaque fonction Matlab que vous créez sera nommée exoN-Nom.m où N est le numéro de l'exercice et Nom votre nom de famille.*
- *Les quatre exercices sont indépendants et peuvent être faits dans un ordre quelconque. Quand la question est précédée de* **t** *il s'agit d'une question théorique, quand elle est précédée de* **m** *il s'agit d'une question où on vous demande d'écrire quelque chose en Matlab.*

Exercice 1:

La table ci-contre donne quelques valeurs du logarithme népérien log. On souhaite l'utiliser pour obtenir une valeur approchée de log(2.2) par interpolation.

x	$\log x$
1.5	0.4055
2	0.6931
2.5	0.9163
3	1.0986

t 1) Donner un majorant de l'erreur si on interpole
a) sur les deux points 2 et 2.5
b) sur les trois points 1.5, 2, 2.5
c) sur les quatre points 1.5, 2, 2.5, 3

m 2) Donnez la valeur prise par le polynôme d'interpolation en 2.2 dans chacun des trois cas ci-dessus (vous pourrez soit utiliser la fonction que vous avez créée lors du TD2, soit faire le calcul à la main à l'aide des différences divisées). Sachant que la vraie valeur est $\log(2.2) = 0.7885$ est-ce bien en accord avec les résultats de la question 1) ?

Exercice 2:

On considère l'équation différentielle

$$\begin{cases} -y''(x) + xy'(x) - y(x) = \cos x, \quad x \in (0,1) \\ y(0) = -1 \quad y'(1) = 1. \end{cases}$$

qu'on souhaite résoudre par une méthode de différences finies.

t 1) Écrire la matrice et le second membre du système linéaire qu'on doit résoudre. On précisera bien les changements qu'imposent les condition $y(0) = -1$ et $y'(1) = 1$ par rapport à l'exemple

traité lors du TD3.
m 2) Écrire le programme en Matlab correspondant et tracer la solution sur l'intervalle $[0,1]$.

Exercice 3:
L'objet de cet exercice est de mettre en place une méthode de Gauss pour calculer des intégrales du type $\int_{-1}^{1} f(x)\,\log|x|dx$ (où log est le logarithme népérien).
t 1) Pour n entier, calculer l'intégrale $I_n = \int_{-1}^{1} x^n \,\log|x|dx$ (on pourra distinguer les cas n pair et n impair et utiliser une intégration par parties).
t 2) Déterminer les quatre premiers polynômes orthogonaux P_0, P_1, P_2, P_3 pour le produit scalaire $(f,g) = -\int_{-1}^{1} f(x)\,g(x)\,\log|x|dx$ et expliciter les trois racines x_0, x_1, x_2 du polynôme P_3.
t 3) En déduire une formule d'intégration numérique de Gauss. Quel est l'ordre de cette méthode?
m 4) Écrire une fonction Matlab pour utiliser cette formule et l'appliquer à différentes fonctions f.

Exercice 4:
On considère l'équation différentielle

$$\begin{cases} y'(t) = -y^2(t) \\ y(0) = 1\ . \end{cases} \tag{1}$$

t 1) Écrire l'algorithme de la méthode d'Euler explicite, puis de la méthode d'Euler implicite (à pas h constant) pour cette équation.
m 2) Programmez chacune des méthodes en Matlab avec une seule fonction qui prendra en entrée le pas h et le temps final T, et donnera en sortie les deux vecteurs de valeurs obtenues par les deux méthodes d'Euler et tracera les solutions approchées sur $[0,T]$ sur le même graphe (un bonus sera accordé si vous mettez en plus une légende et un titre sur le graphique).
t 3) Quelle est la solution exacte de l'équation (1)? Vérifier que $0 \le y(t) \le 1$ pour tout $t \ge 0$.
t 4) Montrer que les valeurs approchées y_n vérifient $0 \le y_n \le 1$ pour tout choix de h pour la méthode d'Euler implicite, alors que ce n'est vrai que pour $h \le 1$ pour la méthode d'Euler explicite.