Ecole des Mines de Nancy
2017-2018
Mathématiques

Analyse numérique: Test 1 - sujet A

(durée du test: 2h)

- *Le polycopié du cours et les notes de TD sont autorisés à l'exclusion de tout autre document. Vous pouvez réutiliser vos fonctions Matlab créées en TD.*
- *Durant la première heure, on travaillera uniquement sur feuille: les ordinateurs resteront éteints. Durant la seconde heure, seul Matlab sera ouvert sur votre session: en particulier tout accès à Internet (navigateur, mail...) est interdit.*
- *A la fin de la séance, vous rendez votre copie et vous envoyez à l'adresse notée au tableau vos fonctions Matlab. Chaque fonction Matlab que vous créez sera nommée exoN_Nom.m où N est le numéro de l'exercice et Nom votre nom de famille.*
- *Les quatre exercices sont indépendants et peuvent être faits dans un ordre quelconque. Quand la question est précédée de* **t** *il s'agit d'une question théorique, quand elle est précédée de* **m** *il s'agit d'une question Matlab.*

Exercice 1:

La table ci-contre donne trois valeurs d'une fonction f inconnue.

x	$f(x)$
$x_0 = -1$	0
$x_1 = 0$	-1
$x_2 = 2$	9

t 1) Calculer les différences divisées $f[x_0]$, $f[x_0, x_1]$, $f[x_0, x_1, x_2]$ et le polynôme d'interpolation de degré 2 P_2 passant par ces trois points.
t 2) Calculer une valeur possible de $f(1)$ et estimer l'erreur commise en terme de M_3 (maximum de la dérivée 3ème de f sur l'intervalle $[-1, 2]$).
t 3) On considère les deux fonctions suivantes:

$$f_1(x) = \frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 1 \quad \text{et} \quad f_2(x) = -x^4 - 3x^3 + 8x^2 + 9x - 1\,.$$

Ces fonctions passent-elles par les mêmes trois points que f? Calculer $f_1(1)$ et $f_2(1)$, est-ce en accord avec la formule d'erreur trouvée à la question 2? Expliquez.
m 4) Tracer sur un même graphique les fonctions P_2, f_1, f_2 sur l'intervalle $[-2, 3]$.

Exercice 2:

On veut mettre en place une méthode de Gauss pour calculer des intégrales du type $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-|x|}\,dx$.
t 1) On pose, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$: $I_n = \int_{-\infty}^{+\infty} x^n e^{-|x|}\,dx$. Montrer que

$$I_{2n+1} = 0 \quad \text{et} \quad I_{2n} = 2n(2n-1)I_{2n-2}\,.$$

En déduire les valeurs de I_n pour $n \leq 6$.
t 2) Déterminer les 4 premiers polygones orthogonaux Q_0, Q_1, Q_2, Q_3 (Q_k est de degré k) pour

le produit scalaire $(f,g) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)g(x)e^{-|x|}\,dx$. Déterminer les racines du polynôme Q_3.
t 3) En déduire une formule d'intégration numérique de Gauss pour calculer $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-|x|}\,dx$. Quel est l'ordre de cette méthode?
m 4) Programmer la méthode en Matlab et l'appliquer en choisissant quelques fonctions f.

Exercice 3:
On considère l'équation différentielle

$$\begin{cases} -y''(x) + \cos(x)\,y(x) = x^2 \\ y(0) = 0 \quad y(1) = 0. \end{cases} \tag{1}$$

t 1) On veut utiliser une méthode de différences finies pour résoudre cette équation. Écrire le système linéaire qu'on doit résoudre.
m 2) Écrire le programme Matlab pour résoudre cette équation différentielle et tracer la solution sur l'intervalle $[0,1]$.
t,m 3) On change maintenant les conditions aux limites en choisissant $y'(0) = 0$ et $y(1) = 2$. Expliquez ce qui va changer dans le système linéaire. Programmer la résolution du nouveau système et tracer la solution sur l'intervalle $[0,1]$.

Exercice 4:
On considère l'équation différentielle

$$\begin{cases} y'(t) = e^{-ty(t)} \\ y(0) = 0\ . \end{cases} \tag{2}$$

t 1) Montrer que (1) possède une unique solution sur un petit intervalle de temps $[0,\tau)$.
Montrer qu'il existe une unique solution définie pour tout $t \geq 0$.
t 2) Montrer que $y(t) \geq y(1)$ pour $t \geq 1$, en déduire que $y(t)$ est bornée sur $\mathbb{R}_+$ et qu'elle admet une limite en $+\infty$.
m 3) Programmer la méthode d'Euler explicite et l'utiliser pour donner une valeur approchée de cette limite. Quel test d'arrêt imaginez-vous?