Ecole des Mines de Nancy
2016-2017
Mathématiques

Analyse numérique: Test 1 - sujet A

(durée du test: 2h)

- *Le polycopié du cours et les notes de TD sont autorisés à l'exclusion de tout autre document. Vous pouvez réutiliser vos fonctions Matlab créées en TD.*
- *Durant la première heure, on travaillera uniquement sur feuille: les ordinateurs resteront éteints. Durant la seconde heure, seul Matlab sera ouvert sur votre session: en particulier tout accès à Internet (navigateur, mail...) est interdit.*
- *A la fin de la séance, vous rendez votre copie et vous envoyez à l'adresse notée au tableau vos fonctions Matlab. Chaque fonction Matlab que vous créez sera nommée exoN-Nom.m où N est le numéro de l'exercice et Nom votre nom de famille.*
- *Les quatre exercices sont indépendants et peuvent être faits dans un ordre quelconque. Quand la question est précédée de* **t** *il s'agit d'une question théorique, quand elle est précédée de* **m** *il s'agit d'une question Matlab.*

Exercice 1:
t 1) Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0, \pi]$ par $f(x) = \exp(\sin x)$.
a) Calculer les trois premières dérivées de f.
b) Déterminer le signe de la dérivée troisième $f^{(3)}$ sur $[0, \pi]$ et en déduire la valeur de $M_2 = \max_{x \in [0,\pi]} |f''(x)|$.
t 2) On veut calculer $\int_0^\pi f(x)\, dx$ par la méthode des points milieux.
Combien faut-il prendre de points dans l'intervalle $[0, \pi]$ si on veut le résultat avec une erreur inférieure à 10^{-8}?
m 3) Écrire une fonction Matlab qui prend en entrée le nombre de points n et donne en sortie la valeur de l'intégrale calculée par la méthode des points milieux avec n points. Exécuter votre fonction avec le nombre de points trouvé à la question précédente.

Exercice 2:
On souhaite approcher les 5 points $M_1 = (-1, 2), M_2 = (0, 0), M_3 = (1, -1), M_4 = (3, 0), M_5 = (4, 2)$ le mieux possible, au sens des moindres carrés, par une parabole du type $y = a + bx^2$.

t 1) En introduisant les vecteurs Y (contenant les ordonnées des points), U (avec que des 1), X_2 (contenant les carrés des abscisses des points), écrire le système linéaire que doivent vérifier a et b.
m 2) Écrire une fonction matlab qui prend en entrée les vecteurs X, Y et donne en sortie les coefficients a, b et qui trace les points (avec des + bleues) et la parabole (en rouge).
m 3) Tester votre fonction avec les points donnés ci-dessus (ou bien faites la résolution à la main, si vous n'avez pas su écrire la fonction matlab).

Exercice 3:
On considère cinq points équidistants qu'on notera $x_{i-2}, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, x_{i+2}$, on notera h l'écart entre deux points consécutifs et on considère une fonction f quelconque.
t 1) Calculer la différence divisée $f[x_{i-2}, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$. On pourra noter f_{i-2} pour $f(x_{i-2})$, etc...
t 2) En déduire une formule de dérivation numérique pour approcher la dérivée quatrième $f^{(4)}(x_i)$.
m 3) J'ai écrit le code Matlab ci-dessous. Quel est précisément le problème que je souhaite résoudre? J'y ai glissé deux erreurs qui font qu'il ne s'éxécute pas. Pouvez-vous retrouver ces deux erreurs?

```
function Y=resolbeam(n,G)
h=1/n; X=0:h:1; u=12*h^4;
A=diag(6/u*ones(1,n-3))+diag(-4/u*ones(1,n-4),1)+diag(-4/u*ones(1,n-4),-1)+...
   diag(1/u*ones(1,n-4),2) + diag(1/u*ones(1,n-4),-2);
Xint=X(3:n-2); g=G(Xint);
b=g+[3/u -1/u zeros(1,n-8) 1/u -3/u];
Yint=A\b'; Y=[1 1 Yint' -1 -1];
plot(Xint,Y,'-b')
end
```

Exercice 4:
On considère l'équation différentielle

$$\left\{ \begin{array}{l} y''(t) = \sin y(t) \\ y(0) = 1 \ , \ y'(0) = 0 \, . \end{array} \right. \tag{1}$$

t 1) Mettre cette équation sous la forme canonique $Y'(t) = F(t, Y(t))$.
t 2) Montrer que la fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ qui au vecteur (x, y) associe le vecteur $(y, \sin x)$ est lipschitzienne de rapport 1 (on pourra travailler avec la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^2$). En déduire que l'équation (1) possède une solution unique définie sur tout $\mathbb{R}$.
t 3) En multipliant l'équation par y' et en intégrant, trouver une relation entre $y(t)$ et $y'(t)$.
t 4) On suppose qu'il existe un $T > 0$ tel que $y(T) = 1$, montrer que $y'(T) = 0$. En déduire que dans ce cas, la solution est périodique de période T.
m 5) Programmer la méthode d'Euler explicite pour résoudre l'équation (1). Êtes-vous capable de trouver un T tel que $y(T) = 1$?