Ecole des Mines de Nancy
2014-2015
Mathématiques: TCS11

Analyse numérique: Test 1 - sujet A
(durée du test: 2h)

- *Le polycopié du cours et les notes de TD sont autorisés à l'exclusion de tout autre document.*
- *Durant la première heure, on travaillera uniquement sur feuille: les ordinateurs resteront éteints. On écrira sur la feuille les algorithmes ou fonctions Matlab qui seront codés dans la suite. Durant la seconde heure, seul Matlab sera ouvert sur votre session: en particulier tout accès à Internet (navigateur, mail...) est interdit.*
- *A la fin de la séance, vous rendez votre copie et vous envoyez à l'adresse notée au tableau vos fonctions Matlab.*
- *Les quatre exercices sont indépendants et peuvent être faits dans un ordre quelconque.*

Exercice 1:
On veut calculer $\int_0^2 \sin(x^3)\, dx$ par la méthode des points milieux.
1) Combien faut-il prendre de points dans l'intervalle $[0, 2]$ si on veut le résultat avec une erreur inférieure à 10^{-8}?
2) Écrire une fonction Matlab qui prend en entrée le nombre de points n et donne en sortie la valeur de l'intégrale calculée par la méthode des points milieux avec n points. Exécuter votre fonction avec le nombre de points trouvé à la première question.

Exercice 2:
Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[-1, 1]$ par $f(x) = x^3 + 1$.
1) Déterminer le polynôme d'interpolation P_2 (de degré ≤ 2) de f sur les points équidistants $x_0 = -1, x_1 = 0, x_2 = 1$ et le le polynôme d'interpolation Q_2 (de degré ≤ 2) de f sur les points de Chebyshev $x_i = \cos(\frac{(2i+1)\pi}{6}), i = 0, 1, 2$. On écrira dans les deux cas le tableau des différences divisées.
2) Calculer $\|f - P_2\|_\infty$ et $\|f - Q_2\|_\infty$ (on rappelle que $\|g\|_\infty$ est la valeur maximum prise par $|g(x)|$ sur l'intervalle $[-1, 1]$).
3) On utilise maintenant le produit scalaire $(g, h) := \int_{-1}^1 g(x)h(x)dx$ et la norme associée $\|g\|_2 = \sqrt{(g, g)}$. Déterminer le polynôme R_2 de degré ≤ 2 qui approche le mieux f au sens des moindres carrés, c'est-à-dire qui minimise $\|f - R_2\|_2$ parmi tous les polynômes de degré ≤ 2. Calculer $\|f - R_2\|_\infty$.
4) Tracer sur un même graphique en Matlab, les quatre fonctions f, P_2, Q_2, R_2.

Exercice 3:
On considère l'équation différentielle

$$\begin{cases} y'(t) = e^{-ty(t)} \\ y(0) = 0 \; . \end{cases}$$

1) Montrer l'existence et l'unicité locale, puis globale sur $\mathbb{R}_+$ de la solution.
2) En utilisant $y(t) \geq y(1)$ pour $t \geq 1$, montrer que $y(t)$ est bornée sur $\mathbb{R}_+$. En déduire qu'elle admet une limite en $+\infty$.
3) Programmer la méthode d'Euler explicite et l'utiliser pour donner une valeur approchée de cette limite. Quel test d'arrêt imaginez-vous?

Exercice 4:
On considère l'équation différentielle

$$\left\{ \begin{array}{l} -y''(x) + xy(x) = e^x \\ y(0) = 1 \quad y'(1) = 0. \end{array} \right.$$

1) On veut utiliser une méthode de différences finies pour résoudre cette équation. Écrire le système linéaire qu'on doit résoudre.
2) Écrire le programme Matlab pour résoudre cette équation différentielle et tracer la solution sur l'intervalle $[0, 1]$.