Analyse Numérique

Première année

Xavier ANTOINE

Mines

2016-2017

Séance 8 : Résolutions des équations non linéaires

Introduction

Description du problème

Description du problème

- nous savons résoudre explicitement certaines équations.

Description du problème

- nous savons résoudre explicitement certaines équations.
  par exemple l'équation
  $$x^2 - x - 1 = 0$$
  admet deux solutions : $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$

Description du problème

- nous savons résoudre explicitement certaines équations.
  par exemple l'équation
  $$x^2 - x - 1 = 0$$
  admet deux solutions : $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$
- en revanche, si nous considérons l'équation
  $$\cos x = x,$$
  une étude mathématique (laquelle ?) nous indique qu'elle possède une unique solution comprise entre 0 et 1, mais nous ne pouvons pas l'exprimer de façon explicite.

Description du problème

- nous savons résoudre explicitement certaines équations.
  par exemple l'équation
  $$x^2 - x - 1 = 0$$
  admet deux solutions : $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$
- en revanche, si nous considérons l'équation
  $$\cos x = x,$$
  une étude mathématique (laquelle ?) nous indique qu'elle possède une unique solution comprise entre 0 et 1, mais nous ne pouvons pas l'exprimer de façon explicite.
- toutefois, pour faire du calcul numérique, une **approximation** de la solution sera suffisante avec si possible une estimation de l'erreur.

Description du problème

soit l'équation

$$f(x) = 0$$

où f une fonction d'une variable réelle à valeur réelle.

Description du problème

soit l'équation

$$f(x) = 0$$

où f une fonction d'une variable réelle à valeur réelle.

- on suppose que cette équation admet (au moins) une racine r.

Description du problème

soit l'équation

$$f(x) = 0$$

où f une fonction d'une variable réelle à valeur réelle.

- on suppose que cette équation admet (au moins) une racine r.
- l'idée est de construire une suite (x_n) qui converge vers r la solution de notre équation

Description du problème

soit l'équation

$$f(x) = 0$$

où f une fonction d'une variable réelle à valeur réelle.

- on suppose que cette équation admet (au moins) une racine r.
- l'idée est de construire une suite (x_n) qui converge vers r la solution de notre équation
- ainsi par, définition de la convergence, le terme x_n de la suite sera une approximation de r, la précision dépendant du choix de n.

Description du problème

soit l'équation

$$f(x) = 0$$

où f une fonction d'une variable réelle à valeur réelle.

- on suppose que cette équation admet (au moins) une racine r.
- l'idée est de construire une suite (x_n) qui converge vers r la solution de notre équation
- ainsi par, définition de la convergence, le terme x_n de la suite sera une approximation de r, la précision dépendant du choix de n.

Question

comment construire cette suite (x_n) qui converge vers la solution de notre équation ?

Objectifs du chapitre

Objectifs du chapitre

- décrire les méthodes numériques les plus fréquemment utilisées

Objectifs du chapitre

- décrire les méthodes numériques les plus fréquemment utilisées
- étudier la convergence de ces méthodes

Objectifs du chapitre

- décrire les méthodes numériques les plus fréquemment utilisées
- étudier la convergence de ces méthodes
- évaluer la performance de ces méthodes i.e. **la vitesse de convergence** des suites associées

Objectifs du chapitre

- décrire les méthodes numériques les plus fréquemment utilisées
- étudier la convergence de ces méthodes
- évaluer la performance de ces méthodes i.e. **la vitesse de convergence** des suites associées
- adapter quelques méthodes pour traiter le problème plus général

$$f(x) = 0$$

où f une fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ et x un vecteur de $\mathbb{R}^n$.

Un peu d'analyse avant de commencer

Soit l'équation

$$f(x) = 0$$

où f une fonction d'une variable réelle à valeur réelle.

Soit l'équation

$$f(x) = 0$$

où f une fonction d'une variable réelle à valeur réelle.

Avant de mettre en oeuvre une méthode numérique, il convient (si possible) de

Soit l'équation

$$f(x) = 0$$

où f une fonction d'une variable réelle à valeur réelle.

Avant de mettre en oeuvre une méthode numérique, il convient (si possible) de

- s'assurer que l'équation possède au moins une solution

Soit l'équation

$$f(x) = 0$$

où f une fonction d'une variable réelle à valeur réelle.

Avant de mettre en oeuvre une méthode numérique, il convient (si possible) de

- s'assurer que l'équation possède au moins une solution
- déterminer le nombre de racines

Soit l'équation

$$f(x) = 0$$

où f une fonction d'une variable réelle à valeur réelle.

Avant de mettre en oeuvre une méthode numérique, il convient (si possible) de

- s'assurer que l'équation possède au moins une solution
- déterminer le nombre de racines
- séparer les racines i.e. déterminer des intervalles $[a_i, b_i]$ dans lesquels l'équation considérée a une solution et une seule

Pour cela nous avons

Théorème des Valeurs Intermédiaires

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, f une application de I dans $\mathbb{R}$, continue sur I. S'il existe deux éléments a et b de I tels que $a < b$ et $f(a)f(b) \leq 0$ alors il existe $r \in [a, b]$ tel que $f(r) = 0$.

Pour cela nous avons

Théorème des Valeurs Intermédiaires

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, f une application de I dans $\mathbb{R}$, continue sur I. S'il existe deux éléments a et b de I tels que $a < b$ et $f(a)f(b) \leq 0$ alors il existe $r \in [a, b]$ tel que $f(r) = 0$.

Théorème

Soient a et b deux réels tels que $a < b$ et f une application de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$, continue et strictement monotone sur $[a, b]$. Si $f(a)f(b) \leq 0$ alors il existe un unique $r \in [a, b]$ tel que $f(r) = 0$.

Exemple 1 :

Résoudre sur $\mathbb{R}$

$$x - 0.2\sin(x) - 0.5 = 0.$$

Exemple 1 :

Résoudre sur $\mathbb{R}$

$$x - 0.2\sin(x) - 0.5 = 0.$$

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x - 0.2\sin(x) - 0.5$$

Exemple 1 :

Résoudre sur $\mathbb{R}$

$$x - 0.2\sin(x) - 0.5 = 0.$$

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x - 0.2\sin(x) - 0.5$$

La fonction f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et comme nous avons pour tout x

$$f'(x) = 1 - 0.2\cos(x) > 0$$

cette fonction est aussi strictement croissante sur $\mathbb{R}$. De plus, comme

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \quad \text{et} \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

nous en déduisons que f admet une unique racine sur $\mathbb{R}$.

Exemple 1 :

Résoudre sur $\mathbb{R}$

$$x - 0.2\sin(x) - 0.5 = 0.$$

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x - 0.2\sin(x) - 0.5$$

plus précisément, comme

$$f(0) = -0.5 < 0 \quad \text{et} \quad f(\pi) = \pi - 0.5 > 0$$

f admet une unique racine sur $\mathbb{R}$ comprise entre 0 et π.

Exemple 2 :

Résoudre sur $\mathbb{R}$

$$\cos(x) = e^{-x}.$$

Exemple 2 :

Résoudre sur $\mathbb{R}$

$$\cos(x) = e^{-x}.$$

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \cos(x) - e^{-x}.$$

Exemple 2 :

Résoudre sur $\mathbb{R}$

$$\cos(x) = e^{-x}.$$

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \cos(x) - e^{-x}.$$

La fonction f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et comme nous avons pour tout x

$$f'(x) = -\sin(x) + e^{-x}.$$

Exemple 2 :

Résoudre sur $\mathbb{R}$

$$\cos(x) = e^{-x}.$$

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \cos(x) - e^{-x}.$$

La fonction f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et comme nous avons pour tout x

$$f'(x) = -\sin(x) + e^{-x}.$$

Il est donc difficile d'étudier le signe de f' et d'en déduire les variations de f, puisque nous retrouvons un problème *"similaire"*.

Exemple 2 :

Résoudre sur $\mathbb{R}$

$$\cos(x) = e^{-x}.$$

Considérons maintenant la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = e^{x}\cos(x) - 1$$

Exemple 2 :

Résoudre sur $\mathbb{R}$

$$\cos(x) = e^{-x}.$$

Considérons maintenant la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = e^{x}\cos(x) - 1$$

La fonction g est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et comme nous avons pour tout x

$$g'(x) = e^{x}(\cos(x) - \sin(x)) = \sqrt{2}e^{x}\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right).$$

cette fonction est aussi strictement monotone sur les intervalles $[\frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{5\pi}{4} + k\pi]$, $k \in \mathbb{Z}$.

Exemple 2 :

Résoudre sur $\mathbb{R}$

$$\cos(x) = e^{-x}.$$

La fonction g est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et comme nous avons pour tout x

$$g'(x) = e^x(\cos(x) - \sin(x)) = \sqrt{2}e^x \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right).$$

cette fonction est aussi strictement monotone sur les intervalles $[\frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{5\pi}{4} + k\pi]$, $k \in \mathbb{Z}$.

L'étude des signes successifs de $g(\frac{\pi}{4} + k\pi)$ permet alors de localiser les racines.

Exemple 2 :

Résoudre sur $\mathbb{R}$

$$\cos(x) = e^{-x}.$$

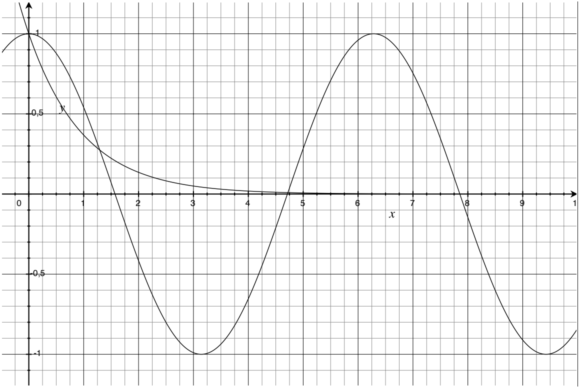
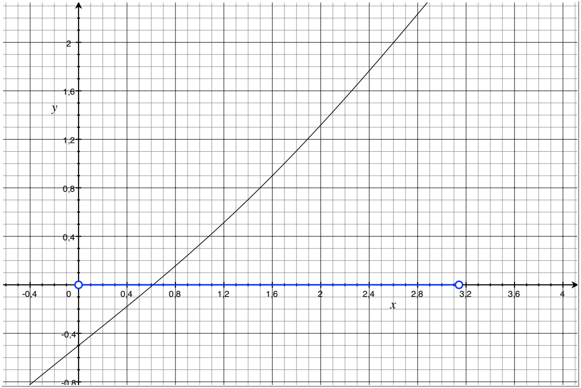


FIGURE – les deux courbes

Quelques algorithmes classiques

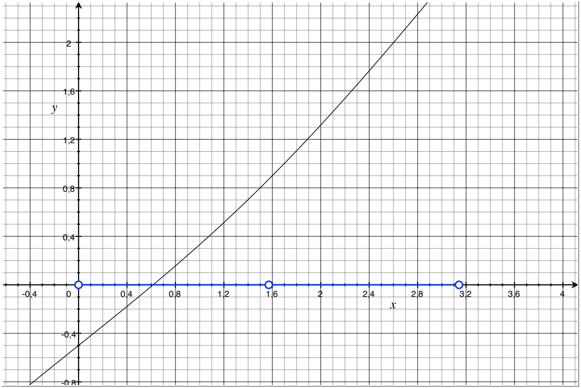
Méthode de dichotomie

Le principe de la dichotomie



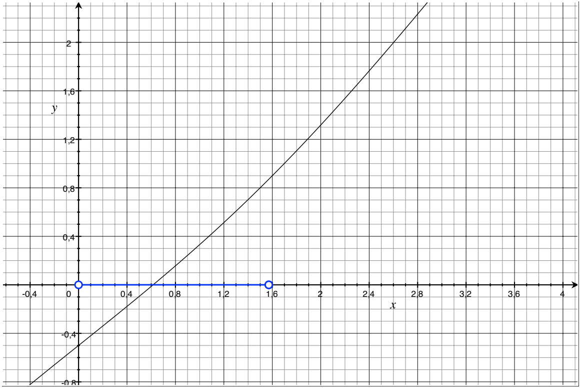
Méthode de dichotomie

Le principe de la dichotomie



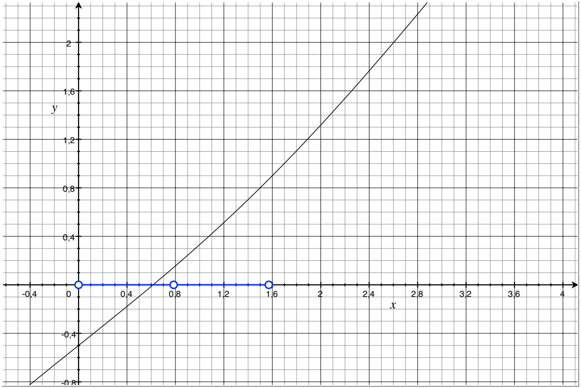
Méthode de dichotomie

Le principe de la dichotomie



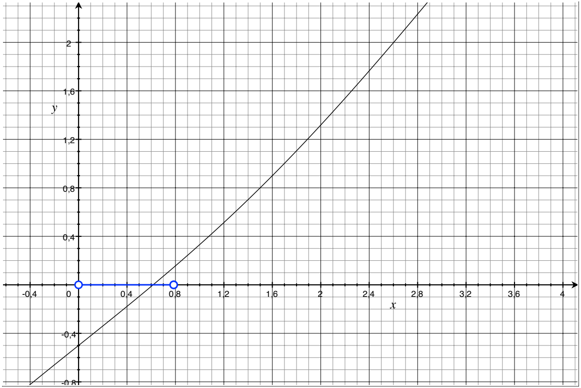
Méthode de dichotomie

Le principe de la dichotomie



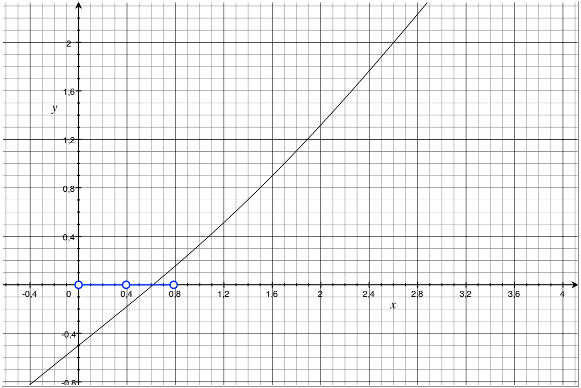
Méthode de dichotomie

Le principe de la dichotomie



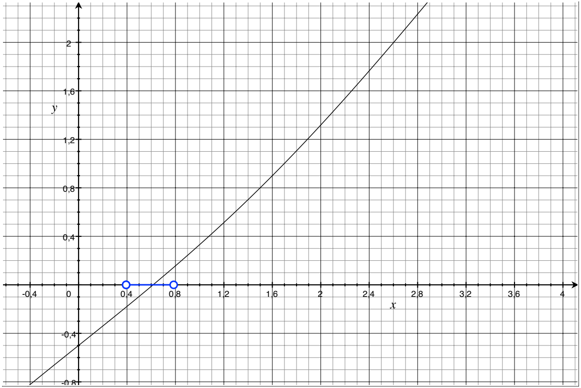
Méthode de dichotomie

Le principe de la dichotomie



Méthode de dichotomie

Le principe de la dichotomie



Méthode de dichotomie

Le principe de la dichotomie

on part d'un intervalle contenant une racine et on construit une suite d'intervalles vérifiant :

- la racine appartient à tous les intervalles
- la longueur des intervalles tend vers 0

On obtient ainsi un encadrement de plus en plus fin de la racine.

Méthode de dichotomie

un intervalle $[a, b]$ étant défini par ses extrémités a et b, pour définir la suite d'intervalles il est équivalent de définir les suites (a_n) et (b_n) des extrémités des intervalles.

Algorithme de la dichotomie

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue et telle que $f(a) f(b) \leq 0$.

$a_0 = a,\ b_0 = b$;
pour tous les *n de* 0 *à* N **faire**
- $m := \frac{(a_n + b_n)}{2}$;
- **si** $f(a) f(m) \leq 0$ **alors**
  - $a_{n+1} := a_n,\ b_{n+1} := m$;
- **sinon**
  - $a_{n+1} := m,\ b_{n+1} := b_n$;

Méthode de dichotomie

Remarques

- dès que f est continue sur $[a, b]$ et que $f(a)f(b) \leq 0$, cette méthode converge vers r tel que $f(r) = 0$.

Méthode de dichotomie

Remarques

- dès que f est continue sur $[a, b]$ et que $f(a)f(b) \leq 0$, cette méthode converge vers r tel que $f(r) = 0$.
- une seule évaluation de la fonction f est nécessaire par itération

Méthode de dichotomie

Remarques

- dès que f est continue sur $[a, b]$ et que $f(a)f(b) \leq 0$, cette méthode converge vers r tel que $f(r) = 0$.
- une seule évaluation de la fonction f est nécessaire par itération
- comme nous avons

$$a_n \leq r \leq b_n, \quad \forall n \geq 0$$

on peut choisir indifféremment a_N ou b_N comme valeur approchée de la racine, a_N sera alors une valeur approchée par défaut et b_N une valeur approchée par excès

Méthode de dichotomie

Remarques

- dès que f est continue sur $[a, b]$ et que $f(a)f(b) \leq 0$, cette méthode converge vers r tel que $f(r) = 0$.
- une seule évaluation de la fonction f est nécessaire par itération
- comme nous avons

$$a_n \leq r \leq b_n, \quad \forall n \geq 0$$

  on peut choisir indifféremment a_N ou b_N comme valeur approchée de la racine, a_N sera alors une valeur approchée par défaut et b_N une valeur approchée par excès
- nous aurons alors une précision de

$$|a_N - r| \leq |a_N - b_N| = \frac{|a - b|}{2^N}$$

Méthode de dichotomie

Remarques

- on peut, en fonction de la précision ϵ souhaitée, déterminer *a priori* le temps d'arrêt N

$$|a_N - b_N| = \frac{|a-b|}{2^N} < \epsilon$$

$$N \geq E\left(\frac{\ln(|a-b|) - \ln(\epsilon)}{\ln(2)}\right) + 1$$

Méthode de dichotomie

Remarques

- on peut, en fonction de la précision ϵ souhaitée, déterminer *a priori* le temps d'arrêt N

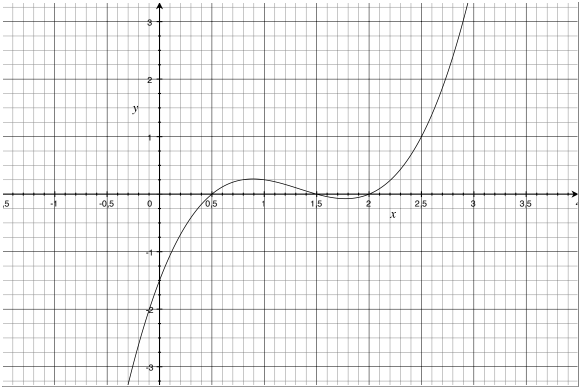
$$|a_N - b_N| = \frac{|a-b|}{2^N} < \epsilon$$

$$N \geq E\left(\frac{\ln(|a-b|) - \ln(\epsilon)}{\ln(2)}\right) + 1$$

- Cette méthode converge même si la fonction f a plusieurs racines dans l'intervalle de départ.

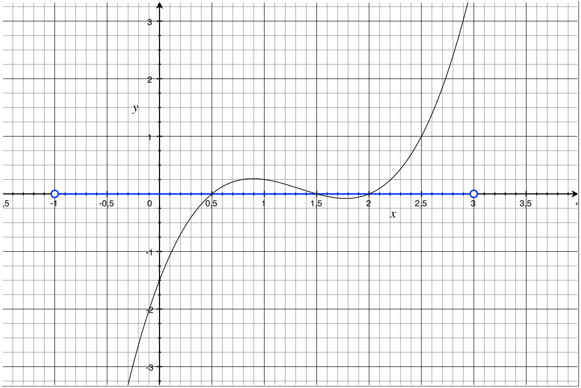
Méthode de dichotomie

Exemple :



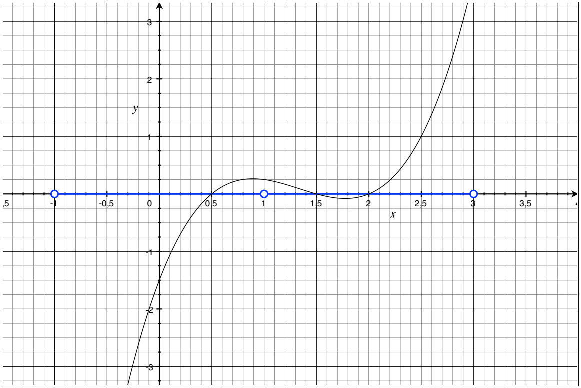
Méthode de dichotomie

Exemple :



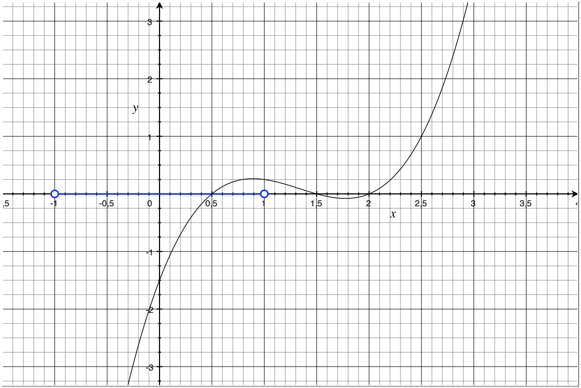
Méthode de dichotomie

Exemple :



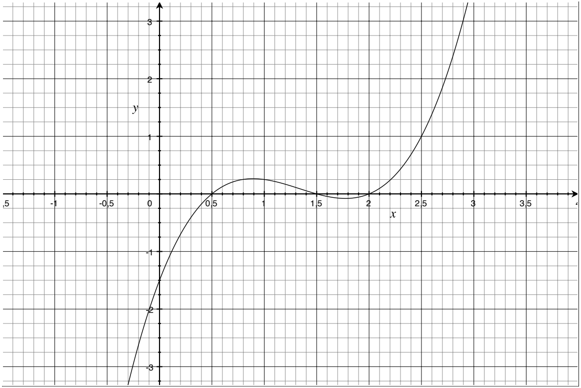
Méthode de dichotomie

Exemple :



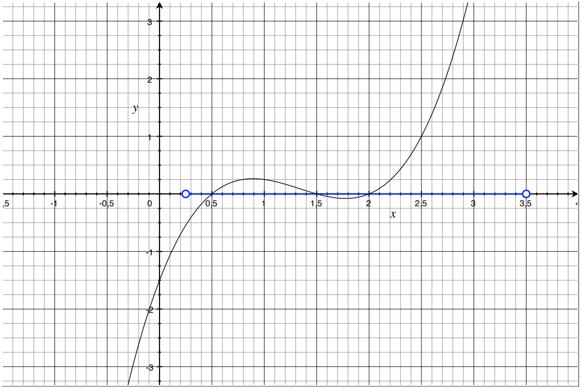
Méthode de dichotomie

Exemple :



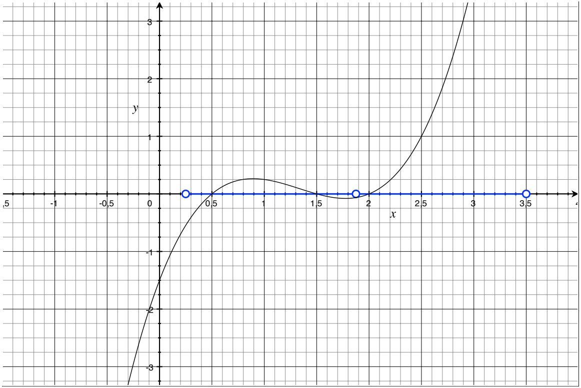
Méthode de dichotomie

Exemple :



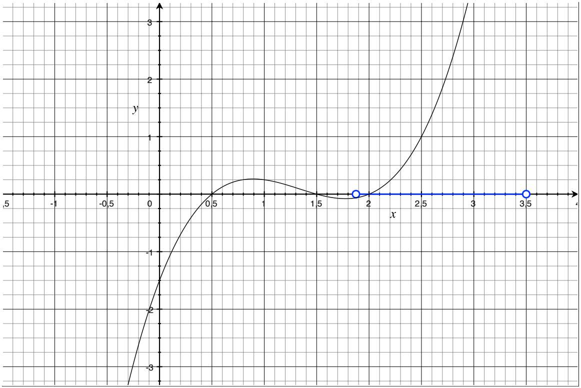
Méthode de dichotomie

Exemple :



Méthode de dichotomie

Exemple :



Les méthodes de point fixe

Principe

La recherche d'une solution de l'équation $f(x) = 0$ peut être vue comme la recherche d'une solution de l'équation

$$g(x) = x$$

Les méthodes de point fixe

Principe

La recherche d'une solution de l'équation $f(x) = 0$ peut être vue comme la recherche d'une solution de l'équation

$$g(x) = x$$

par exemple en posant :

- $g(x) = x - f(x)$
- $g(x) = x - \dfrac{f(x)}{\alpha}$, avec $\alpha \neq 0$
- $g(x) = x - \dfrac{f(x)}{\alpha(x)}$, avec $\forall\ x \in I,\ \alpha(x) \neq 0$

Les méthodes de point fixe

Principe

La recherche d'une solution de l'équation $f(x) = 0$ peut être vue comme la recherche d'une solution de l'équation

$$g(x) = x$$

par exemple en posant :

- $g(x) = x - f(x)$
- $g(x) = x - \dfrac{f(x)}{\alpha}$, avec $\alpha \neq 0$
- $g(x) = x - \dfrac{f(x)}{\alpha(x)}$, avec $\forall\ x \in I,\ \alpha(x) \neq 0$

Ainsi la recherche d'une racine de f se ramène à la recherche d'un point fixe de g.

Les méthodes de point fixe

On peut alors utiliser l'algorithme suivant :

x_0 donné;

pour tous les *n de* 0 *à* . . . **faire**

$\quad x_{n+1} = g(x_n)$

Les méthodes de point fixe

On peut alors utiliser l'algorithme suivant :

x_0 donné;

pour tous les *n de* 0 *à* ... **faire**

$\quad x_{n+1} = g(x_n)$

En effet, rappelons ce résultat d'analyse :

Théorème

Soient I un intervalle stable par g, a un point de I et (x_n) la suite définie par les relations $x_0 = a$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = g(x_n)$.
Si on ajoute les hypothèses I fermé et f continue sur I, alors si la suite (x_n) converge sa limite est un point fixe de g dans I.

Les méthodes de point fixe

Ainsi, si la suite (x_n) générée par cet algorithme converge (et sous ces hypothèses), alors sa limite sera un point fixe de g et donc une racine de f.

Les méthodes de point fixe

Ainsi, si la suite (x_n) générée par cet algorithme converge (et sous ces hypothèses), alors sa limite sera un point fixe de g et donc une racine de f.

La convergence de la suite (x_n) générée par cet algorithme peut être obtenue facilement avec des résultats classiques d'analyse.

Les méthodes de point fixe

Ainsi, si la suite (x_n) générée par cet algorithme converge (et sous ces hypothèses), alors sa limite sera un point fixe de g et donc une racine de f.

La convergence de la suite (x_n) générée par cet algorithme peut être obtenue facilement avec des résultats classiques d'analyse.

La méthode n'est en général pas très robuste et converge lentement.

Vitesse de convergence

Soit (x_n) une suite qui converge vers le nombre r.

Vitesse de convergence

Soit (x_n) une suite qui converge vers le nombre r.

- on dit que la convergence de la suite est linéaire, s'il existe C, $0 < C < 1$ tel que
$$\lim_{n\to\infty} \frac{|x_{n+1} - r|}{|x_n - r|} = C. \tag{1}$$

Vitesse de convergence

Soit (x_n) une suite qui converge vers le nombre r.

- on dit que la convergence de la suite est linéaire, s'il existe C, $0 < C < 1$ tel que
$$\lim_{n\to\infty} \frac{|x_{n+1} - r|}{|x_n - r|} = C. \tag{1}$$
- le nombre C est appelé vitesse de convergence.

Vitesse de convergence

Soit (x_n) une suite qui converge vers le nombre r.

- on dit que la convergence de la suite est linéaire, s'il existe C, $0 < C < 1$ tel que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|x_{n+1} - r|}{|x_n - r|} = C. \tag{1}$$

- le nombre C est appelé vitesse de convergence.
- on dit que la convergence est au moins linéaire, s'il existe C, $0 < C < 1$ tel que

$$|x_{n+1} - r| \leq C\,|x_n - r| \quad \forall n \geq 0$$

Vitesse de convergence

- lorsque (1) est vérifiée pour $C = 0$, on dit alors que la convergence de la suite est super-linéaire.
  Dans ce cas, il est possible de préciser la vitesse de convergence
- on dit que la convergence est d'ordre q, s'il existe $q > 1$, $C > 0$ tel que
$$\lim_{n\to\infty} \frac{|x_{n+1} - r|}{|x_n - r|^q} = C$$
- on dit que la convergence est d'ordre au moins q, s'il existe $q > 1$, $C > 0$ tel que
$$|x_{n+1} - r| \leq C\,|x_n - r|^q$$
- une convergence d'ordre 2 est aussi dite quadratique et une convergence d'ordre 3 est aussi dite cubique.

Vitesse de convergence

Signification pratique

Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $e_n = |x_n - r|$. Le nombre e_n représente l'erreur commise lorsqu'on approche le nombre r par le nombre x_n.

Vitesse de convergence

Signification pratique

Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $e_n = |x_n - r|$. Le nombre e_n représente l'erreur commise lorsqu'on approche le nombre r par le nombre x_n.

- si la convergence est linéaire alors il existe $0 < C < 1$ tel que $e_{n+1} \sim Ce_n$

Vitesse de convergence

Signification pratique

Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $e_n = |x_n - r|$. Le nombre e_n représente l'erreur commise lorsqu'on approche le nombre r par le nombre x_n.

- si la convergence est linéaire alors il existe $0 < C < 1$ tel que $e_{n+1} \sim Ce_n$
- ceci signifie qu'asymptotiquement l'erreur est réduite d'un facteur C à chaque itération.

Vitesse de convergence

Signification pratique

Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $e_n = |x_n - r|$. Le nombre e_n représente l'erreur commise lorsqu'on approche le nombre r par le nombre x_n.

- si la convergence est linéaire alors il existe $0 < C < 1$ tel que $e_{n+1} \sim Ce_n$
- ceci signifie qu'asymptotiquement l'erreur est réduite d'un facteur C à chaque itération.
- plus petite sera la vitesse de convergence, plus rapide sera donc la convergence de la suite

Vitesse de convergence

Signification pratique

- si la convergence est d'ordre $q > 1$, alors il existe $0 < C$ tel que $e_{n+1} \sim Ce_n^q$.

Vitesse de convergence

Signification pratique

- si la convergence est d'ordre $q > 1$, alors il existe $0 < C$ tel que $e_{n+1} \sim C e_n^q$.
- posons alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\lambda_n = -\log_{10} e_n$.

Vitesse de convergence

Signification pratique

- si la convergence est d'ordre $q > 1$, alors il existe $0 < C$ tel que $e_{n+1} \sim Ce_n^q$.
- posons alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\lambda_n = -\log_{10} e_n$.
- le nombre λ_n est une "mesure" du nombre de décimales exactes de x_n.

Vitesse de convergence

Signification pratique

- si la convergence est d'ordre $q > 1$, alors il existe $0 < C$ tel que $e_{n+1} \sim Ce_n^q$.
- posons alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\lambda_n = -\log_{10} e_n$.
- le nombre λ_n est une "mesure" du nombre de décimales exactes de x_n.
- en effet si $e_n = 10^{-5}$ alors $\lambda_n = 5$, si $e_n = 10^{-10}$ alors $\lambda_n = 10$, etc...

Vitesse de convergence

Signification pratique

- si la convergence est d'ordre $q > 1$, alors il existe $0 < C$ tel que $e_{n+1} \sim C e_n^q$.
- posons alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\lambda_n = -\log_{10} e_n$.
- le nombre λ_n est une "mesure" du nombre de décimales exactes de x_n.
- en effet si $e_n = 10^{-5}$ alors $\lambda_n = 5$, si $e_n = 10^{-10}$ alors $\lambda_n = 10$, etc...
- nous avons

$$\lambda_{n+1} \sim q\lambda_n.$$

ce qui signifie qu'asymptotiquement, le nombre x_{n+1} possède q fois plus de "décimales exactes" que le nombre x_n.

Vitesse de convergence

Signification pratique

- si la convergence est d'ordre $q > 1$, alors il existe $0 < C$ tel que $e_{n+1} \sim Ce_n^q$.
- posons alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\lambda_n = -\log_{10} e_n$.
- le nombre λ_n est une "mesure" du nombre de décimales exactes de x_n.
- en effet si $e_n = 10^{-5}$ alors $\lambda_n = 5$, si $e_n = 10^{-10}$ alors $\lambda_n = 10$, etc...
- nous avons

$$\lambda_{n+1} \sim q\lambda_n.$$

  ce qui signifie qu'asymptotiquement, le nombre x_{n+1} possède q fois plus de "décimales exactes" que le nombre x_n.
- plus grand sera l'ordre de convergence, plus rapide sera donc la convergence de la suite

Ordre de convergence pour une méthode de point fixe

On peut montrer que

$$e_{n+1} = g'(r)e_n + \frac{g''(r)}{2}e_n^2 + \frac{g'''(r)}{6}e_n^3 + o(e_n^3)$$

Plusieurs cas se présentent alors à nous :

Ordre de convergence pour une méthode de point fixe

On peut montrer que

$$e_{n+1} = g'(r)e_n + \frac{g''(r)}{2}e_n^2 + \frac{g'''(r)}{6}e_n^3 + o(e_n^3)$$

Plusieurs cas se présentent alors à nous :

- si $g'(r) \neq 0$ et $|g'(r)| < 1$, alors $e_{n+1} \sim Ce_n$ avec $C = |g'(r)|$. La suite (x_n) converge linéairement vers r.

Ordre de convergence pour une méthode de point fixe

On peut montrer que

$$e_{n+1} = g'(r)e_n + \frac{g''(r)}{2}e_n^2 + \frac{g'''(r)}{6}e_n^3 + o(e_n^3)$$

Plusieurs cas se présentent alors à nous :

- si $g'(r) \neq 0$ et $|g'(r)| < 1$, alors $e_{n+1} \sim Ce_n$ avec $C = |g'(r)|$. La suite (x_n) converge linéairement vers r.
- si $g'(r) = 0$ et $g''(r) \neq 0$, alors $e_{n+1} \sim Ce_n^2$ avec $C = \frac{|g''(r)|}{2}$. La suite (x_n) est convergente d'ordre 2.

Ordre de convergence pour une méthode de point fixe

On peut montrer que

$$e_{n+1} = g'(r)e_n + \frac{g''(r)}{2}e_n^2 + \frac{g'''(r)}{6}e_n^3 + o(e_n^3)$$

Plusieurs cas se présentent alors à nous :

- si $g'(r) \neq 0$ et $|g'(r)| < 1$, alors $e_{n+1} \sim Ce_n$ avec $C = |g'(r)|$. La suite (x_n) converge linéairement vers r.
- si $g'(r) = 0$ et $g''(r) \neq 0$, alors $e_{n+1} \sim Ce_n^2$ avec $C = \frac{|g''(r)|}{2}$. La suite (x_n) est convergente d'ordre 2.
- si $g'(r) = g''(r) = 0$ et $g'''(r) \neq 0$, alors $e_{n+1} \sim Ce_n^3$ avec $\mu = \frac{|g'''(r)|}{6}$. La suite (x_n) est convergente d'ordre 3.

Ordre de convergence pour une méthode de point fixe

On peut montrer que

$$e_{n+1} = g'(r)e_n + \frac{g''(r)}{2}e_n^2 + \frac{g'''(r)}{6}e_n^3 + o(e_n^3)$$

Plusieurs cas se présentent alors à nous :

- si $g'(r) \neq 0$ et $|g'(r)| < 1$, alors $e_{n+1} \sim Ce_n$ avec $C = |g'(r)|$. La suite (x_n) converge linéairement vers r.
- si $g'(r) = 0$ et $g''(r) \neq 0$, alors $e_{n+1} \sim Ce_n^2$ avec $C = \frac{|g''(r)|}{2}$. La suite (x_n) est convergente d'ordre 2.
- si $g'(r) = g''(r) = 0$ et $g'''(r) \neq 0$, alors $e_{n+1} \sim Ce_n^3$ avec $\mu = \frac{|g'''(r)|}{6}$. La suite (x_n) est convergente d'ordre 3.
- et ainsi de suite, si on suppose plus de régularité sur g.

La méthode de Newton

La méthode de Newton

Description de la méthode

- si f est une fonction affine

$$f(x) = ax + b \quad (a \neq 0)$$

alors, il est facile de déterminer la racine : $r = -\dfrac{b}{a}$.

La méthode de Newton

Description de la méthode

- si f est une fonction affine

$$f(x) = ax + b \quad (a \neq 0)$$

alors, il est facile de déterminer la racine : $r = -\dfrac{b}{a}$.

- dans le cas général, l'idée est de substituer à la fonction f une approximation affine

La méthode de Newton

Description de la méthode

- si f est une fonction affine

$$f(x) = ax + b \quad (a \neq 0)$$

alors, il est facile de déterminer la racine : $r = -\dfrac{b}{a}$.

- dans le cas général, l'idée est de substituer à la fonction f une approximation affine
- pour cela nous pouvons utiliser sa tangente.

La méthode de Newton

Description de la méthode

Supposons que f soit une fonction définie sur un intervalle I, dérivable sur I et qu'elle possède une racine r dans I

La méthode de Newton

Description de la méthode

Supposons que f soit une fonction définie sur un intervalle I, dérivable sur I et qu'elle possède une racine r dans I

- soit x_0 un point I assez proche de la racine r

La méthode de Newton

Description de la méthode

Supposons que f soit une fonction définie sur un intervalle I, dérivable sur I et qu'elle possède une racine r dans I

- soit x_0 un point I assez proche de la racine r
- on a alors

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0) \\ &= f_{x_0}(x) + o(x - x_0) \end{aligned}$$

avec $f_{x_0}(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

La méthode de Newton

Description de la méthode

- la fonction affine f_{x_0} admet une racine x_1 si et seulement si $f'(x_0) \neq 0$, et dans ce cas

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

La méthode de Newton

Description de la méthode

- la fonction affine f_{x_0} admet une racine x_1 si et seulement si $f'(x_0) \neq 0$, et dans ce cas

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

- on peut espérer alors que x_1 soit plus proche de la racine r que ne l'est x_0 i.e. que x_1 soit une meilleure approximation de r

La méthode de Newton

Description de la méthode

- la fonction affine f_{x_0} admet une racine x_1 si et seulement si $f'(x_0) \neq 0$, et dans ce cas

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

- on peut espérer alors que x_1 soit plus proche de la racine r que ne l'est x_0 i.e. que x_1 soit une meilleure approximation de r
- on peut alors recommencer avec x_1 à la place de x_0 et ainsi de suite ...

La méthode de Newton

Description de la méthode

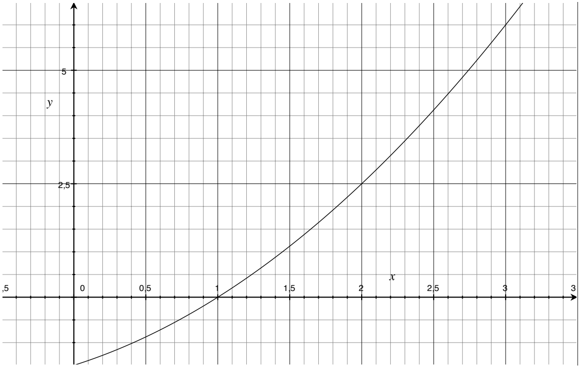
- la fonction affine f_{x_0} admet une racine x_1 si et seulement si $f'(x_0) \neq 0$, et dans ce cas

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

- on peut espérer alors que x_1 soit plus proche de la racine r que ne l'est x_0 i.e. que x_1 soit une meilleure approximation de r
- on peut alors recommencer avec x_1 à la place de x_0 et ainsi de suite ...
- on espère donc améliorer l'approximation de la racine r par itérations successives.

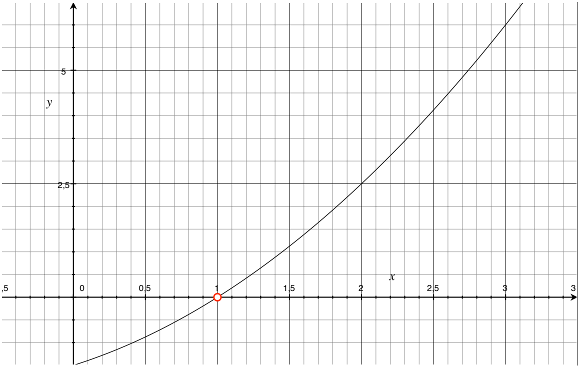
La méthode de Newton

Description de la méthode



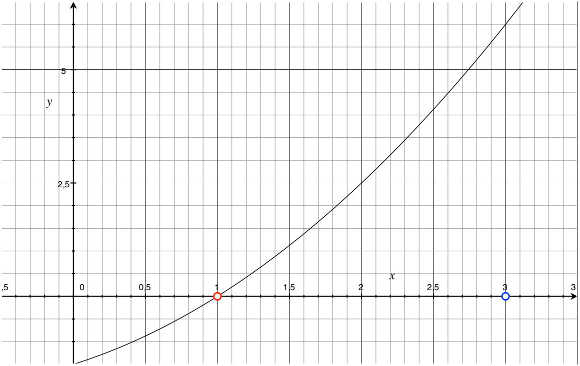
La méthode de Newton

Description de la méthode



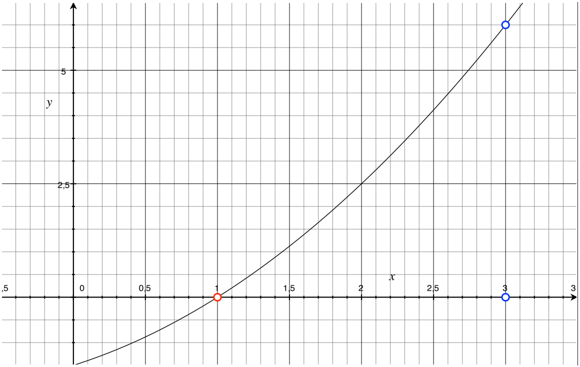
La méthode de Newton

Description de la méthode



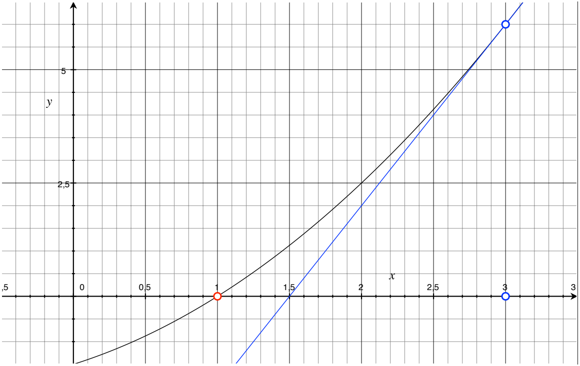
La méthode de Newton

Description de la méthode



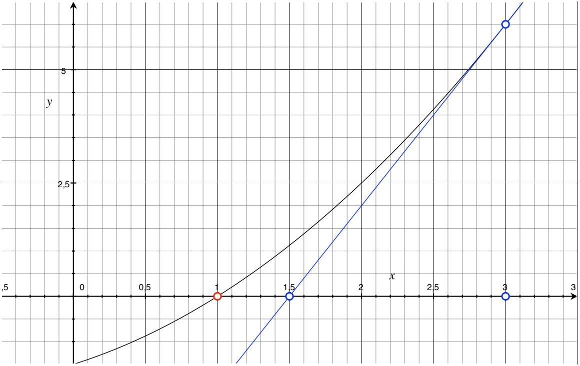
La méthode de Newton

Description de la méthode



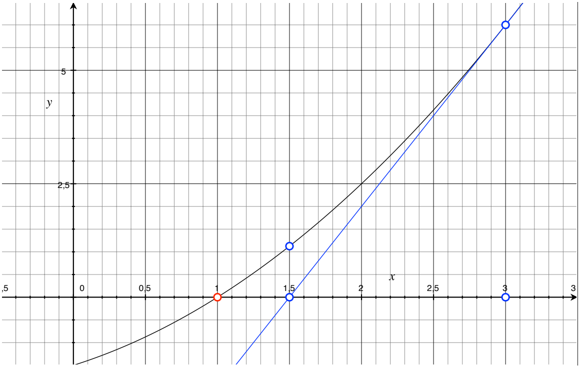
La méthode de Newton

Description de la méthode



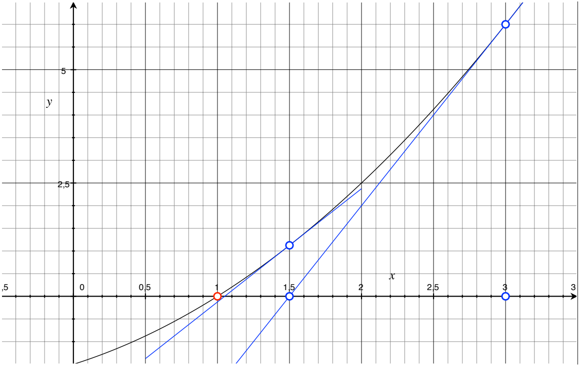
La méthode de Newton

Description de la méthode



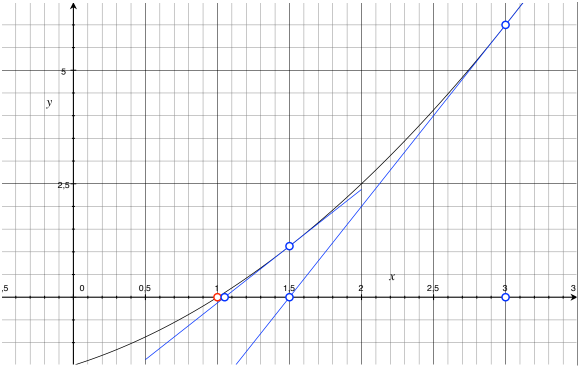
La méthode de Newton

Description de la méthode



La méthode de Newton

Description de la méthode



La méthode de Newton

Algorithme de Newton

x_0 donné;

pour tous les *n de* 0 *à* ... **faire**

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

La méthode de Newton

Algorithme de Newton

x_0 donné;
pour tous les *n de* 0 *à* ... **faire**

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Remarques

- pour que la suite (x_n) soit bien définie, il faut que $f'(x_n) \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

La méthode de Newton

Algorithme de Newton

x_0 donné;

pour tous les n *de* 0 *à* ... **faire**

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Remarques

- pour que la suite (x_n) soit bien définie, il faut que $f'(x_n) \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- à chaque itération, nous devons faire deux évaluations de fonction : calcul de $f(x_n)$ et calcul de $f'(x_n)$

La méthode de Newton

Algorithme de Newton

x_0 donné;
pour tous les *n de* 0 *à* ... **faire**
$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$

Remarques

- pour que la suite (x_n) soit bien définie, il faut que $f'(x_n) \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- à chaque itération, nous devons faire deux évaluations de fonction : calcul de $f(x_n)$ et calcul de $f'(x_n)$
- la méthode de Newton est une méthode de point fixe avec

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

La méthode de Newton

Convergence de la méthode de Newton

Théorème

Soient f une application de I dans I et $r \in I$ une racine de la fonction f. On suppose que f est deux fois dérivable sur un voisinage de r et que $f'(r) \neq 0$.
Alors, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $x_0 \in]r - \eta, r + \eta[\cap I$ la méthode de Newton génère une suite (x_n) qui est bien définie et qui converge au moins quadratiquement vers r.

La méthode de Newton

Convergence de la méthode de Newton

Théorème

Soient f une application de I dans I et $r \in I$ une racine de la fonction f. On suppose que f est deux fois dérivable sur un voisinage de r et que $f'(r) \neq 0$.
Alors, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $x_0 \in]r - \eta, r + \eta[\cap I$ la méthode de Newton génère une suite (x_n) qui est bien définie et qui converge au moins quadratiquement vers r.

En effet

$$g'(x) = 1 - \frac{(f'(x))^2 - f(x)f'(x)}{(f'(x))^2}$$

et donc $g'(r) = 0$

La méthode de Newton

Convergence de la méthode de Newton

Remarques

La méthode de Newton

Convergence de la méthode de Newton

Remarques

- ce résultat indique que si x_0 est choisi assez proche de r (et si $f'(r) \neq 0$) alors la méthode converge

La méthode de Newton

Convergence de la méthode de Newton

Remarques

- ce résultat indique que si x_0 est choisi assez proche de r (et si $f'(r) \neq 0$) alors la méthode converge
- lorsqu'il y a convergence, elle est rapide (au moins d'ordre 2)

La méthode de Newton

Convergence de la méthode de Newton

Remarques

- ce résultat indique que si x_0 est choisi assez proche de r (et si $f'(r) \neq 0$) alors la méthode converge
- lorsqu'il y a convergence, elle est rapide (au moins d'ordre 2)
- si x_0 n'est pas choisi assez proche de r, alors il peut y avoir divergence

La méthode de Newton

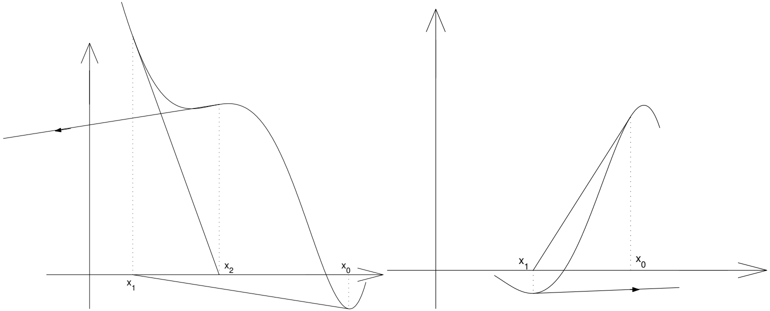
Convergence de la méthode de Newton

Remarques

- ce résultat indique que si x_0 est choisi assez proche de r (et si $f'(r) \neq 0$) alors la méthode converge
- lorsqu'il y a convergence, elle est rapide (au moins d'ordre 2)
- si x_0 n'est pas choisi assez proche de r, alors il peut y avoir divergence
- dans la pratique, il n'y a généralement aucun moyen de savoir dans quelle mesure x_0 est assez voisin de r

La méthode de Newton

Convergence de la méthode de Newton



La méthode de Newton

Exemple : $x^2 = a$

Soit $a > 0$

La méthode de Newton

Exemple : $x^2 = a$

Soit $a > 0$

- on cherche à obtenir une approximation de $\sqrt{a}$

La méthode de Newton

Exemple : $x^2 = a$

Soit $a > 0$

- on cherche à obtenir une approximation de $\sqrt{a}$
- ici $f(x) = x^2 - a$ et l'algorithme de Newton s'écrit dans ce cas

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - a}{2x_n} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right)$$

La méthode de Newton

Exemple : $x^2 = a$

Soit $a > 0$

- on cherche à obtenir une approximation de $\sqrt{a}$
- ici $f(x) = x^2 - a$ et l'algorithme de Newton s'écrit dans ce cas

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - a}{2x_n} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right)$$

- on retrouve le fameux algorithme d'Héron ou méthode babylonienne

La méthode de Newton

Exemple : $x^2 = a$

Soit $a > 0$

- on cherche à obtenir une approximation de $\sqrt{a}$
- ici $f(x) = x^2 - a$ et l'algorithme de Newton s'écrit dans ce cas

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - a}{2x_n} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right)$$

- on retrouve le fameux algorithme d'Héron ou méthode babylonienne
- on montre facilement que pour tout $x_0 > 0$ cette suite converge vers $\sqrt{a}$

La méthode de Newton

Exemple : $x^2 = a$

pour $a = 2$ et $x_0 = 1$ on obtient

$$
\begin{aligned}
x_0 &= 1 \\
x_1 &= \frac{3}{2} = 1.5 \\
x_2 &= \frac{17}{12} = 1.41666666666666\ldots \\
x_3 &= \frac{577}{408} = 1.41421568627450\ldots \\
x_4 &= \frac{665857}{470832} = 1.41421356237468\ldots
\end{aligned}
$$

La méthode de Newton

Exemple : $x^2 = a$

pour $a = 2$ et $x_0 = 1$ on obtient

$$\begin{aligned}
x_0 &= 1 \\
x_1 &= \frac{3}{2} = 1.5 \\
x_2 &= \frac{17}{12} = 1.41666666666666\ldots \\
x_3 &= \frac{577}{408} = 1.41421568627450\ldots \\
x_4 &= \frac{665857}{470832} = 1.41421356237468\ldots
\end{aligned}$$

pour mémoire

$$\sqrt{2} = 1.414213562373095\ldots$$

La méthode de Newton

Remarque

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

- la méthode de Newton nécessite à chaque itération deux évaluations de fonction : le calcul de $f(x_n)$ et le calcul de $f'(x_n)$.

La méthode de Newton

Remarque

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

- la méthode de Newton nécessite à chaque itération deux évaluations de fonction : le calcul de $f(x_n)$ et le calcul de $f'(x_n)$.
- il faut donc connaitre la dérivée de f et être capable d'implémenter un algorithme de calcul de f'

La méthode de Newton

Remarque

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

- la méthode de Newton nécessite à chaque itération deux évaluations de fonction : le calcul de $f(x_n)$ et le calcul de $f'(x_n)$.
- il faut donc connaitre la dérivée de f et être capable d'implémenter un algorithme de calcul de f'
- pour remédier à cet inconvénient, nous pouvons remarquer que

$$f'(x) \simeq \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Une nouvelle méthode

Ainsi, nous pouvons obtenir une méthode assez voisine qui évite le calcul de f' :

x_0 donné;
pour tous les *n de* 0 *à* . . . **faire**

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)h_n}{f(x_n+h_n)-f(x_n)}$$

Une nouvelle méthode

Ainsi, nous pouvons obtenir une méthode assez voisine qui évite le calcul de f' :

x_0 donné;
pour tous les *n de* 0 *à* ... **faire**

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)h_n}{f(x_n+h_n)-f(x_n)}$$

Remarques

- cette méthode est bien définie si à chaque itération $f(x_n + h_n) - f(x_n) \neq 0$

Une nouvelle méthode

Ainsi, nous pouvons obtenir une méthode assez voisine qui évite le calcul de f' :

x_0 donné;
pour tous les *n de* 0 *à* . . . **faire**

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)h_n}{f(x_n+h_n)-f(x_n)}$$

Remarques

- cette méthode est bien définie si à chaque itération $f(x_n + h_n) - f(x_n) \neq 0$
- le pas de calcul h_n peut être différent à chaque itération

Une nouvelle méthode

Ainsi, nous pouvons obtenir une méthode assez voisine qui évite le calcul de f' :

x_0 donné;
pour tous les *n de* 0 *à* . . . **faire**

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)h_n}{f(x_n+h_n)-f(x_n)}$$

Remarques

- cette méthode est bien définie si à chaque itération $f(x_n + h_n) - f(x_n) \neq 0$
- le pas de calcul h_n peut être différent à chaque itération
- à chaque itération, nous devons toujours faire deux évaluations : calcul de $f(x_n)$ et calcul de $f(x_n + h_n)$

Vers la méthode de la sécante

pour éviter cette double évaluation on peut poser :

$$h_n = x_{n-1} - x_n \quad \forall n \geq 0$$

En effet, si (x_n) converge, alors (h_n) converge vers 0 et à chaque itération nous avons seulement une évaluation à faire : calcul de $f(x_n)$ (si l'algorithme est correctement écrit !)

pour tous les *n de* 0 *à* ... **faire**

$\quad x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)(x_n - x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$

Vers la méthode de la sécante

pour éviter cette double évaluation on peut poser :

$$h_n = x_{n-1} - x_n \quad \forall n \geq 0$$

En effet, si (x_n) converge, alors (h_n) converge vers 0 et à chaque itération nous avons seulement une évaluation à faire : calcul de $f(x_n)$ (si l'algorithme est correctement écrit !)

pour tous les *n de* 0 *à* . . . **faire**

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)(x_n - x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$$

nous venons d'obtenir la méthode de la sécante

La méthode de la sécante

Description de la méthode

Supposons que f soit une fonction définie sur un intervalle I et qu'elle possède une racine r dans I

La méthode de la sécante

Description de la méthode

Supposons que f soit une fonction définie sur un intervalle I et qu'elle possède une racine r dans I

- soient x_0 et x_1 deux points de I assez proches de la racine r

La méthode de la sécante

Description de la méthode

Supposons que f soit une fonction définie sur un intervalle I et qu'elle possède une racine r dans I

- soient x_0 et x_1 deux points de I assez proches de la racine r
- nous substituons au voisinage de x_1 la fonction f par la droite passant par les points $(x_1, f(x_1))$ et $(x_0, f(x_0))$ d'équation

$$f_{x_1}(x) = \left(\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \right) (x - x_1) + f(x_1)$$

La méthode de la sécante

Description de la méthode

- la fonction affine f_{x_1} admet une racine x_2 si et seulement si $f(x_1) - f(x_0) \neq 0$, et dans ce cas

$$x_2 = x_1 - f(x_1)\left(\frac{x_1 - x_0}{f(x_1) - f(x_0)}\right)$$

La méthode de la sécante

Description de la méthode

- la fonction affine f_{x_1} admet une racine x_2 si et seulement si $f(x_1) - f(x_0) \neq 0$, et dans ce cas

$$x_2 = x_1 - f(x_1)\left(\frac{x_1 - x_0}{f(x_1) - f(x_0)}\right)$$

- on peut espérer alors que x_2 soit plus proche de la racine r que ne le sont x_0 et x_1

La méthode de la sécante

Description de la méthode

- la fonction affine f_{x_1} admet une racine x_2 si et seulement si $f(x_1) - f(x_0) \neq 0$, et dans ce cas

$$x_2 = x_1 - f(x_1)\left(\frac{x_1 - x_0}{f(x_1) - f(x_0)}\right)$$

- on peut espérer alors que x_2 soit plus proche de la racine r que ne le sont x_0 et x_1
- on peut alors recommencer avec x_2 et x_1 et ainsi de suite ...

La méthode de la sécante

Description de la méthode

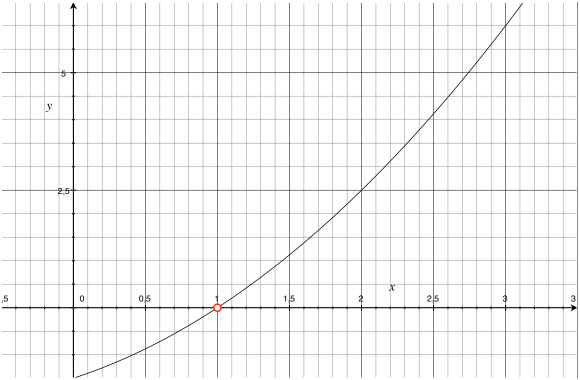
- la fonction affine f_{x_1} admet une racine x_2 si et seulement si $f(x_1) - f(x_0) \neq 0$, et dans ce cas

$$x_2 = x_1 - f(x_1)\left(\frac{x_1 - x_0}{f(x_1) - f(x_0)}\right)$$

- on peut espérer alors que x_2 soit plus proche de la racine r que ne le sont x_0 et x_1
- on peut alors recommencer avec x_2 et x_1 et ainsi de suite ...
- on espère donc améliorer l'approximation de la racine r par itérations successives.

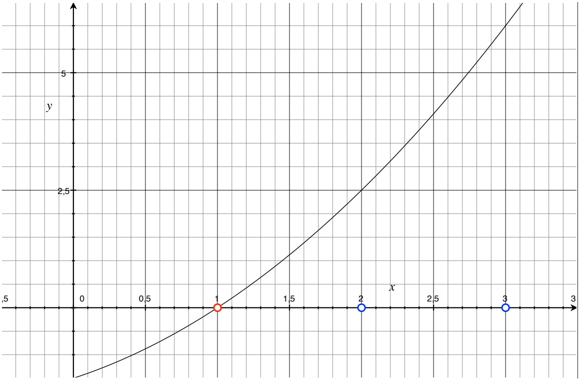
La méthode de la sécante

Description de la méthode



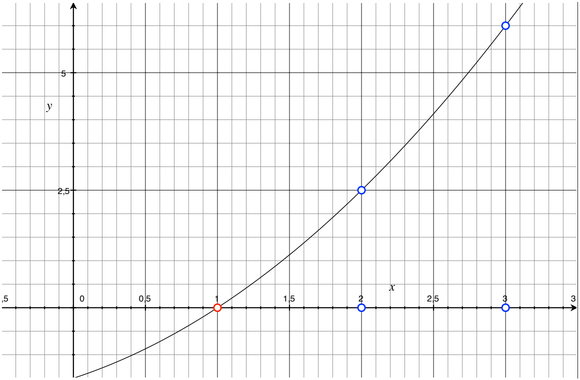
La méthode de la sécante

Description de la méthode



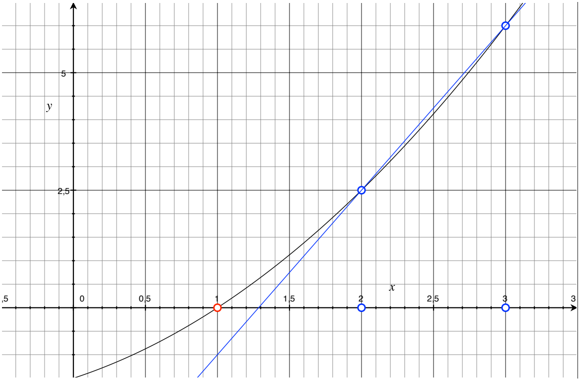
La méthode de la sécante

Description de la méthode



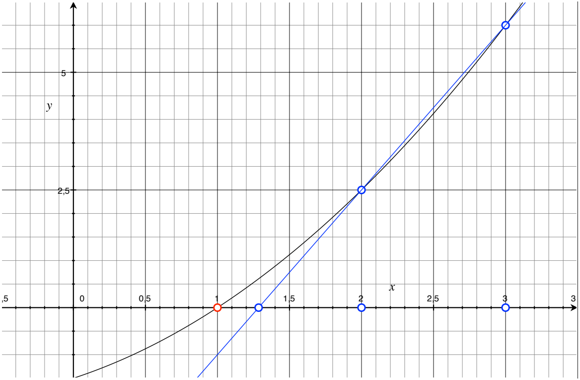
La méthode de la sécante

Description de la méthode



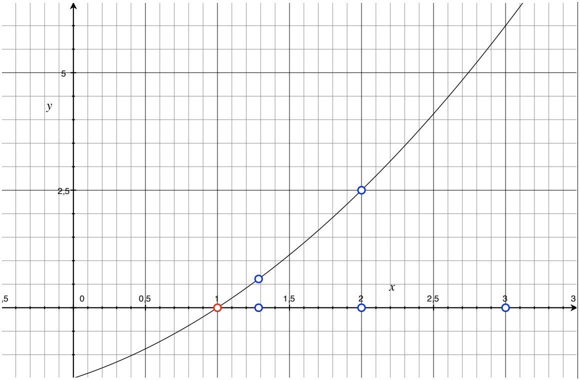
La méthode de la sécante

Description de la méthode



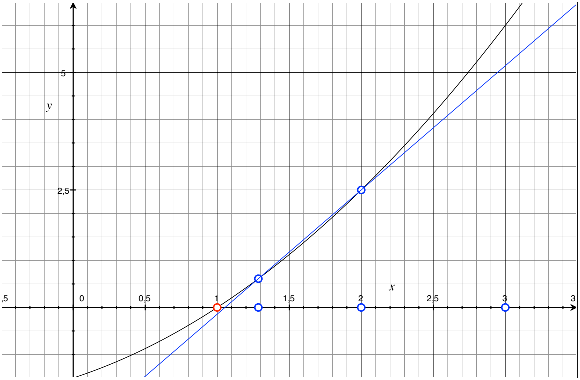
La méthode de la sécante

Description de la méthode



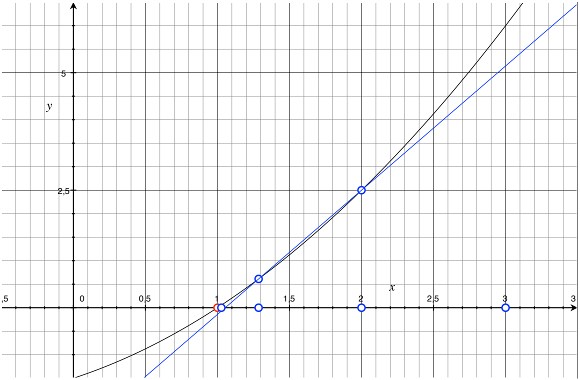
La méthode de la sécante

Description de la méthode



La méthode de la sécante

Description de la méthode



La méthode de la sécante

Algorithme de la sécante

x_0 x_1 donnés;

pour tous les *n de* 0 *à* ... **faire**

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n)\frac{(x_n - x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$$

La méthode de la sécante

Algorithme de la sécante

x_0 x_1 donnés;

pour tous les *n de* 0 *à* ... **faire**

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n)\frac{(x_n - x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$$

Remarques

- pour que la suite (x_n) soit bien définie, il faut que $f(x_n) \neq f(x_{n-1})$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

La méthode de la sécante

Algorithme de la sécante

x_0 x_1 donnés;

pour tous les *n de* 0 *à* . . . **faire**

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n)\frac{(x_n - x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$$

Remarques

- pour que la suite (x_n) soit bien définie, il faut que $f(x_n) \neq f(x_{n-1})$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- à chaque itération, nous devons faire une unique évaluation : calcul de $f(x_n)$

La méthode de la sécante

Convergence de la méthode de la sécante

Théorème

Soient f une application de I dans I et $r \in I$ une racine de la fonction f. On suppose que f est deux fois continument dérivable sur un voisinage de r et que $f'(r) \neq 0$.
Alors, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $x_0 \in]r-\eta, r+\eta[\cap I$ et pour tout $x_0 \in]r-\eta, r+\eta[\cap I$ la méthode de la sécante génère une suite (x_n) qui est bien définie et qui converge vers r.
Dans ce cas la convergence est au moins d'ordre $\frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1.618...$

Comparaison des algorithmes

Méthode de dichotomie

Avantages :

- la convergence est assurée
- un seul calcul de fonction à chaque itération

Inconvénients

- vitesse de convergence linéaire, donc lente

Méthode de Newton

Avantages :

- converge très rapidement lorsqu'il y a convergence
- relativement stable et peu sensible aux erreurs d'arrondis si $f'(r)$ n'est pas trop petit

Inconvénients

- peut diverger si la donnée initiale est mal choisie
- nécessite le calcul de la dérivée de la fonction
- deux évaluations de fonctions à chaque itération

Méthode de la Sécante

Avantages :

- convergence relativement rapide lorsqu'il y a convergence
- nécessite une seule évaluation de fonction à chaque itération

Inconvénients

- peut diverger si la donnée initiale est mal choisie

Un exemple : résolution de $x - 0.2\sin x - 0.5 = 0$ à l'aide des quatre algorithmes

	Dichotomie	Sécante	Newton	Point fixe
	$x_{-1} = 0,5$	$x_{-1} = 0,5$	$x_0 = 1$	$x_0 = 1$
	$x_0 = 1,0$	$x_0 = 1,0$		$x = 0,2\sin x + 0,5$
1	0, 75	0, 5	0, 5	0, 50
2	0, 625	0, 61212248	0, 61629718	0, 595885
3	0, 5625	0, 61549349	0, 61546820	0, 612248
4	0, 59375	0, 61546816	0, 61546816	0, 614941
5	0, 609375			0, 61538219
6	0, 6171875			0, 61545412
7	0, 6132812			0, 61546587
8	0, 6152343			0, 61546779
9	0, 6162109			0, 61546810
10	0, 6157226			0, 61546815
11	0, 6154785			
12	0, 6153564			
13	0, 6154174			
14	0, 6154479			
15	0, 6154532			
16	0, 61547088			
17	0, 61546707			
18	0, 61546897			
19	0, 615468025			
20	0, 615468502			

Systèmes d'équations non linéaires

Description du problème

soit l'équation

$$F(X) = 0$$

où $F : \mathbb{R}^N \mapsto \mathbb{R}^N$ ou encore de façon développée

$$\left\{ \begin{array}{ll} f_1(x_1, x_2, \ldots, x_N) & = 0 \\ f_2(x_1, x_2, \ldots, x_N) & = 0 \\ \vdots & \vdots \\ f_N(x_1, x_2, \ldots, x_N) & = 0 \ . \end{array} \right.$$

La méthode de Newton-Raphson

- la méthode de Newton-Raphson est la généralisation de la méthode de Newton unidimensionnelle aux dimensions supérieures

$$x_{n+1} = x_n - (f'(x_n))^{-1} f(x_n)$$

- elle fait intervenir la matrice Jacobienne de F :

$$F'(X_n) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_N}{\partial x_1} & \frac{\partial f_N}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_N}{\partial x_N} \end{pmatrix}$$

toutes les dérivées partielles étant évaluées au point X_n.

La méthode de Newton-Raphson

- la méthode de Newton-Raphson est la généralisation de la méthode de Newton unidimensionnelle aux dimensions supérieures

$$x_{n+1} = x_n - (f'(x_n))^{-1} f(x_n)$$

- elle fait intervenir la matrice Jacobienne de F :

$$F'(X_n) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_N}{\partial x_1} & \frac{\partial f_N}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_N}{\partial x_N} \end{pmatrix}$$

toutes les dérivées partielles étant évaluées au point X_n.

- La méthode de Newton-Raphson s'écrit donc formellement

$$X_{n+1} = X_n - [F'(X_n)]^{-1} F(X_n)$$

La méthode de Newton-Raphson

Dans la pratique, on ne calcule pas explicitement l'inverse de la matrice Jacobienne, ce qui s'avèrerait trop coûteux, et on préfère écrire l'algorithme sous la forme suivante :

X_0 donné;

pour tous les *n de* 0 *à* . . . **faire**

  Résolution du système linéaire $F'(X_n)\delta_n = -F(X_n)$;

  $X_{n+1} = X_n + \delta_n$;

La méthode de Newton-Raphson

Remarques :

- encore plus qu'en dimension 1, le choix de l'initialisation est crucial et le risque de divergence, si on ne démarre pas à proximité de la solution cherchée, est grand.

La méthode de Newton-Raphson

Remarques :

- encore plus qu'en dimension 1, le choix de l'initialisation est crucial et le risque de divergence, si on ne démarre pas à proximité de la solution cherchée, est grand.
- la convergence est là aussi d'ordre 2, donc très rapide (quand il y a convergence !)

La méthode de Newton-Raphson

Remarques :

- encore plus qu'en dimension 1, le choix de l'initialisation est crucial et le risque de divergence, si on ne démarre pas à proximité de la solution cherchée, est grand.
- la convergence est là aussi d'ordre 2, donc très rapide (quand il y a convergence !)
- la méthode de Newton-Raphson s'avère assez coûteuse puisqu'il faut à chaque itération
  - évaluer $N^2 + N$ fonctions (les N^2 dérivées partielles de la matrice Jacobienne, plus les N fonctions coordonnées)
  - résoudre un système linéaire $N \times N$ (dont la matrice est en général pleine)
  - méthode approchée (type sécante) appelée quasi-Newton (Broyden).