

Fonctions holomorphes

Polycopié rédigé par Antoine Henrot

Cours Tronc Commun TCS11

Semestre 5 : 2013-2014

Ecole des Mines de Nancy - Campus Artem - 54 042 Nancy Cedex
Tel : 03 55 66 28 10 - email: Antoine.Henrot@univ-lorraine.fr

Voici le polycopié correspondant à la première partie du cours de Mathématiques.

Pour lundi 30 septembre, date du premier cours, il vous est demandé de lire le premier chapitre et de noter sur une feuille les questions que vous souhaitez poser durant la séance.

En effet la première heure en Amphi est consacrée pour partie à la réponse aux questions des élèves. Durant les deux heures suivantes, vous ferez en petit groupe des exercices tirés de la liste qui se trouve à la fin du chapitre.

Antoine Henrot

Table des matières

1	Définition, exemples	9
1.1	Définition	9
1.1.1	Limite dans \mathbb{C}	9
1.1.2	Holomorphicité	9
1.1.3	Premiers exemples	11
1.1.4	Premières propriétés	13
1.2	La fonction exponentielle	13
1.3	Les fonctions logarithmes et puissances	15
1.3.1	Introduction	15
1.3.2	Définition des fonctions logarithmes	16
1.3.3	Propriétés	16
1.3.4	Fonctions puissances	18
1.4	Exercices du chapitre 1	18
2	La formule de Cauchy et le Théorème des résidus	21
2.1	Quelques rappels sur les intégrales curvilignes	21
2.1.1	Définition	21
2.1.2	Formule de Green-Riemann	21
2.1.3	Lemmes de majoration	22
2.2	Les formules de Cauchy	23
2.2.1	Première formule de Cauchy	23
2.2.2	Remarques	24
2.2.3	La deuxième formule de Cauchy	25
2.3	Points singuliers et développement en série de Laurent	26
2.3.1	Fonction holomorphe sur une couronne	26
2.3.2	Points singuliers d'une fonction holomorphe	27
2.3.2.1	Singularité éliminable	28
2.3.2.2	Pôle	28
2.3.2.3	Singularité essentielle	28
2.4	La formule des résidus	28
2.4.1	Le théorème des résidus	28

2.4.2	Calcul pratique du résidu	29
2.4.2.1	Cas d'un pôle simple	29
2.4.2.2	Cas d'un pôle multiple	30
2.4.2.3	Cas d'une singularité essentielle	30
2.5	Application au calcul d'intégrales	30
2.5.1	Intégrales du type $\int_0^{2\pi} F(\cos t, \sin t) dt$	30
2.5.2	Intégrales du type $\int_{-\infty}^{+\infty} F(x) dx$	31
2.5.3	Intégrales du type $\int_0^{+\infty} \frac{F(x)}{x^\alpha} dx$	34
2.6	Exercices du chapitre 2	36
3	Conséquences de la Formule de Cauchy	39
3.1	Propriété de moyenne, principe du maximum	39
3.1.1	La propriété de moyenne	39
3.1.2	Le principe du maximum	40
3.2	Dérivabilité et analyticité	41
3.2.1	Une fonction holomorphe est indéfiniment dérivable	41
3.2.2	Analyticité	42
3.2.3	Inégalités de Cauchy et conséquences	43
3.2.4	Principe du prolongement analytique	44
3.2.5	Zéros des fonctions analytiques	44
3.3	Applications de la formule des résidus	45
3.3.1	A la détermination du nombre de zéros et de pôles	45
3.3.2	Le Théorème de Rouché	46
3.4	Exercices du chapitre 3	47
4	Représentation conforme	49
4.1	Introduction	49
4.2	Le problème direct	50
4.3	Le problème inverse	53
4.4	La transformation de Schwarz-Christoffel	54
4.5	Application au problème de Poisson	57
4.6	Exercices du chapitre 4	59
5	Transformée de Laplace	61
5.1	Définition, propriétés	61
5.1.1	La classe des fonctions L^+	61
5.1.2	La Transformée de Laplace	62
5.1.3	Propriétés de la Transformée de Laplace	63
5.1.3.1	Holomorphie	63
5.1.3.2	Linéarité	64
5.1.3.3	Décalage	64

5.1.3.4	Retard	64
5.1.3.5	Changement d'échelle	64
5.1.3.6	Transformée d'une dérivée	64
5.1.3.7	Convolution	65
5.1.3.8	Comportement aux bornes	67
5.1.4	Petit dictionnaire	68
5.1.5	Inversion de la Transformée de Laplace	70
5.2	Applications de la Transformée de Laplace	71
5.2.1	Aux équations différentielles ordinaires	71
5.2.2	Aux équations intégrales	73
5.2.3	Aux équations aux dérivées partielles	74
5.3	Exercices du chapitre 5	75
A	Éléments de topologie	77

Chapitre 1

Définition, exemples

1.1 Définition

1.1.1 Limite dans \mathbb{C}

Comme le point de départ de la théorie des fonctions holomorphes fait intervenir la notion de limite dans \mathbb{C} , il est peut-être prudent de rappeler la convergence dans le plan complexe. La distance naturelle étant donnée par le module, on a la définition habituelle :

Définition 1.1 Soit g une fonction de \mathbb{C} dans \mathbb{C} , définie au voisinage d'un point z_0 . On dit que g a pour limite l au point z_0 et on note

$$\lim_{z \rightarrow z_0} g(z) = l$$

si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0 \text{ tel que } |z - z_0| < \alpha \implies |g(z) - l| < \varepsilon.$$

La différence essentielle entre la convergence dans \mathbb{R} et la convergence dans \mathbb{C} est de nature géométrique. Comme il n'y a que deux façons de converger dans \mathbb{R} (par la gauche ou par la droite), alors qu'il y a une infinité de façons de converger vers un point z_0 dans \mathbb{C} , il est beaucoup plus facile de converger dans \mathbb{R} que dans \mathbb{C} . Nous y reviendrons plus loin.

Dans la pratique, comment fait-on pour étudier la convergence dans \mathbb{C} ? L'un des moyens les plus simples consiste à passer en coordonnées polaires. On pose

$$z = z_0 + re^{i\theta}$$

et faire tendre z vers z_0 revient à faire tendre r vers 0. On s'est donc ramené à ne faire varier qu'un seul paramètre, ce qui est plus simple.

1.1.2 Holomorphie

Outre la notion de continuité d'une fonction de \mathbb{C} dans \mathbb{C} qu'on réécrit simplement avec la définition précédente, il semble assez naturel d'étendre la notion habituelle de dérivabilité. C'est l'objet de la définition qui suit.

Définition 1.2 Soit f une fonction de \mathbb{C} dans \mathbb{C} . On dit que f est **holomorphe** au point z_0 si $\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$ admet une limite quand z tend vers z_0 . Cette limite se note $f'(z_0)$.

On dit que f est holomorphe sur un ouvert¹ Ω , si elle est holomorphe en tous les points de Ω . L'ensemble des fonctions holomorphes sur l'ouvert Ω sera noté $\mathcal{H}(\Omega)$.

La définition précédente est donc exactement la même que celle de la dérivabilité, mais compte-tenu de la remarque précédente sur la convergence dans \mathbb{C} , on imagine qu'il sera plus difficile d'être holomorphe, ce qui va se traduire par le fait que les fonctions holomorphes auront beaucoup plus de propriétés que ne l'ont les fonctions dérivables dans \mathbb{R} comme on le verra tout au long de ce cours.

Comment se traduit la définition précédente quand on explicite la fonction f grâce à sa partie réelle et à sa partie imaginaire ? Autrement dit quel est le lien entre la définition habituelle de la différentiabilité (quand on regarde f comme une fonction de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}^2) et la notion d'holomorphie que nous venons d'introduire ?

Ecrivons $f(z) = f(x+iy) = P(x, y) + iQ(x, y)$ avec $P = \Re f$ et $Q = \Im f$. L'holomorphie au point z_0 peut se traduire par l'égalité (entre nombres complexes)

$$f(z_0 + u) = f(z_0) + f'(z_0)u + u\varepsilon(u) \quad (1.1)$$

où $\varepsilon(u)$ est une fonction tendant vers 0 quand u tend vers 0. Ecrivant $z_0 = x_0 + iy_0$ et $u = h + ik$, et notant $f'(z_0) = c_1 + ic_2$ (1.1) se traduit vectoriellement par

$$\begin{pmatrix} P(x_0 + h, y_0 + k) \\ Q(x_0 + h, y_0 + k) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P(x_0, y_0) \\ Q(x_0, y_0) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 h - c_2 k \\ c_1 k + c_2 h \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \varepsilon \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}. \quad (1.2)$$

Autrement dit, sur l'égalité (1.2), on voit que f est différentiable au point $z_0 = (x_0, y_0)$ (considérée comme fonction de \mathbb{R}^2 dans lui-même) et que sa différentielle en ce point est l'application linéaire dont la matrice est

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial P}{\partial x} & \frac{\partial P}{\partial y} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} & \frac{\partial Q}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 & -c_2 \\ c_2 & c_1 \end{pmatrix}. \quad (1.3)$$

Réciproquement si les fonctions composantes P et Q admettent des dérivées partielles qui satisfont la relation (1.3), alors f est holomorphe en z_0 et $f'(z_0) = c_1 + ic_2$. En résumé, on a

Proposition 1.3 (Conditions de Cauchy) $f(x + iy) = P(x, y) + iQ(x, y)$ est holomorphe au point $z_0 = x_0 + iy_0$ si et seulement si f est différentiable en ce point avec des dérivées partielles qui vérifient :

$$\begin{cases} \frac{\partial P}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial Q}{\partial y}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial P}{\partial y}(x_0, y_0) = -\frac{\partial Q}{\partial x}(x_0, y_0). \end{cases} \quad (1.4)$$

1. pour toutes les notions de *topologie* qui apparaissent dans ce polycopié, se reporter à l'annexe

Remarque 1.1 Comme la différentielle d'une fonction holomorphe est une similitude²(voir ci-dessus), elle a la propriété de "conserver les angles" : si deux courbes se coupent en faisant un certain angle, leurs images par une fonction holomorphe se couperont en faisant le même angle. Nous y reviendrons plus longuement dans le chapitre 4.

1.1.3 Premiers exemples

On vérifie, soit directement grâce à la définition, soit à l'aide des conditions de Cauchy, que les fonctions usuelles comme $f(z) = z^n$, $f(z) =$ polynôme en z , sont holomorphes sur \mathbb{C} . De même, $f(z) =$ fraction rationnelle en z , est holomorphe sur son ensemble de définition. Une catégorie plus importante d'exemples est fournie par les fonctions développables en série entière (ou **analytiques**). Nous y reviendrons d'ailleurs dans le chapitre 3 où nous énoncerons une réciproque à cette propriété.

Proposition 1.4 Une série entière du type $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ est holomorphe à l'intérieur de son disque de convergence. De plus, $f'(z)$ s'obtient en dérivant terme à terme :

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}. \quad (1.5)$$

Démonstration : Notons R le rayon de convergence de la série entière f et R' le rayon de convergence de la série donnée par (1.5). Nous allons tout d'abord montrer que $R = R'$. Soit ρ un réel, $\rho < R'$. Comme la série $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n \rho^{n-1}$ converge, on a

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \rho^n \leq \rho \left(\sum_{n=1}^{\infty} n |a_n| \rho^{n-1} \right) < +\infty$$

et par suite $\rho \leq R$. Comme ce raisonnement est valable pour tout $\rho < R'$, on en déduit en faisant tendre ρ vers R' que $R' \leq R$.

Réciproquement, soit maintenant ρ un réel, $\rho < R$ et fixons un nombre ρ' tel que $\rho < \rho' < R$. On a

$$n |a_n| \rho^{n-1} = \frac{1}{\rho'} (|a_n| \rho'^n) \cdot n \left(\frac{\rho}{\rho'} \right)^{n-1}.$$

Mais comme $\rho' < R$, la série de terme général $a_n \rho'^n$ converge, donc il existe un réel $M > 0$ tel que, pour tout n , $a_n \rho'^n \leq M$. D'où

$$n |a_n| \rho^{n-1} \leq \frac{M}{\rho'} n \left(\frac{\rho}{\rho'} \right)^{n-1}$$

et comme la série de terme général $n \left(\frac{\rho}{\rho'} \right)^{n-1}$ converge, la série $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n \rho^{n-1}$ converge également, ce qui signifie que $\rho \leq R'$. De la même façon que ci-dessus, on en déduit $R \leq R'$ et donc $R = R'$, ce qui termine la première partie de la démonstration.

2. les similitudes (directes) sont précisément les applications linéaires de matrice

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

Pour prouver que la dérivée de f est donnée par la formule (1.5) fixons z tel que $|z| < R$ et introduisons un réel ρ avec $|z| < \rho < R$. On veut étudier le rapport $\frac{f(z+h) - f(z)}{h}$. On peut le faire dès que $f(z+h)$ est défini, ce qui sera en particulier le cas si

$$0 \neq |h| \leq \rho - |z|. \quad (1.6)$$

On a alors

$$\frac{f(z+h) - f(z)}{h} - f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(z, h), \quad (1.7)$$

où on a posé

$$u_n(z, h) = a_n \left((z+h)^{n-1} + z(z+h)^{n-2} + \dots + z^{n-1} - nz^{n-1} \right).$$

Puisque $|z|$ et $|z+h|$ sont tous deux inférieurs à ρ , on a $|u_n(z, h)| \leq 2n|a_n|\rho^{n-1}$. Comme $\rho < R$, la série de terme général $na_n\rho^{n-1}$ est convergente (voir la première partie de la démonstration). Si ε est un réel arbitraire, on peut donc choisir un entier n_0 tel que

$$\sum_{n=n_0+1}^{\infty} 2n|a_n|\rho^{n-1} \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ayant ainsi choisi n_0 , la somme finie $\sum_{n=1}^{n_0} u_n(z, h)$ est un polynôme en h , nul pour $h = 0$.

Par continuité, on peut donc fixer un entier η tel que si $|h| \leq \eta$, on ait $|\sum_{n=1}^{n_0} u_n(z, h)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Finalement, si h satisfait à (1.6) et $|h| \leq \eta$, on déduit de (1.7) que

$$\left| \frac{f(z+h) - f(z)}{h} - f'(z) \right| \leq \left| \sum_{n=1}^{n_0} u_n(z, h) \right| + \sum_{n=n_0+1}^{\infty} 2n|a_n|\rho^{n-1} \leq \varepsilon$$

ce qui prouve le résultat. \square

Après ces exemples de fonctions holomorphes, donnons quelques exemples de fonctions qui ne le sont pas. On vérifie, par exemple grâce aux conditions de Cauchy, que la fonction $f(z) = a\bar{z} + b$ n'est pas holomorphe sur \mathbb{C} (sauf dans le cas trivial $a = 0$). De même, la fonction $f(z) = |z|^2 = z\bar{z}$ n'est holomorphe qu'à l'origine.

Quel est le point commun entre ces deux "contre-exemples" ? C'est la présence d'un terme en \bar{z} dans l'expression de la fonction qui la rend non holomorphe. En effet, en définissant la dérivée par rapport à \bar{z} par la formule :

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} \right)$$

on voit que les conditions de Cauchy sont équivalentes à $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$. Autrement dit, f est holomorphe "si elle ne dépend pas de \bar{z} ".

1.1.4 Premières propriétés

Du fait de la définition, l'holomorphie est préservée par les règles de calcul usuelles : si f et g sont holomorphes

- $\alpha f + \beta g$ est holomorphe (α et β sont deux nombres complexes),
- fg est holomorphe, $\frac{f}{g}$ est holomorphe si g ne s'annule pas,
- $f \circ g$ est holomorphe, avec la formule habituelle $(f \circ g)'(z) = f'(g(z))g'(z)$.

Revenons un instant aux relations satisfaites par la partie réelle P et la partie imaginaire Q d'une fonction holomorphe f . Supposons P et Q de classe C^2 (nous verrons au chapitre 3 que c'est effectivement toujours le cas) et dérivons une fois de plus les conditions de Cauchy, il vient :

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial y} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 Q}{\partial y \partial x}$$

si bien qu'en ajoutant on observe que

$$\Delta P = \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} = 0.$$

On aurait de même $\Delta Q = 0$, si bien qu'on a prouvé que

La partie réelle et la partie imaginaire d'une fonction holomorphe sont des fonctions harmoniques.

Rappelons qu'une fonction harmonique est une fonction dont le Laplacien est nul et que ces fonctions jouent un rôle très important dans la théorie des équations aux dérivées partielles.

Remarquons qu'il s'agit là d'une condition nécessaire pour qu'une fonction P soit la partie réelle d'une fonction holomorphe, mais elle n'est pas *a priori* suffisante. Néanmoins, on peut démontrer qu'on a une réciproque partielle :

Proposition 1.5 *Si Ω est un disque du plan complexe ou un domaine homéomorphe³ à un disque et si P est une fonction définie sur Ω et harmonique ($\Delta P = 0$), alors il existe une fonction f définie et holomorphe sur Ω dont P est la partie réelle.*

1.2 La fonction exponentielle et les fonctions apparentées

La fonction exponentielle et les fonctions cosinus, sinus sont connues du lecteur depuis longtemps. Le plus souvent, elles ont été introduites indépendamment dans la scolarité antérieure. Dans ce paragraphe, nous allons montrer comment, à partir de la définition de la fonction exponentielle comme somme d'une série, on retrouve toutes les propriétés usuelles.

Pour $z \in \mathbb{C}$, posons

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}. \quad (1.8)$$

On pourra aussi noter $\exp(z)$ à la place de e^z . Il est facile de vérifier, par exemple à l'aide du critère de D'Alembert qui fait intervenir le rapport de deux termes consécutifs, que

3. voir Annexe

la série entière définie par (1.8) a un rayon de convergence infini. Elle définit donc une fonction dans le plan complexe tout entier qui, d'après la Proposition 1.4 est holomorphe dans \mathbb{C} . On a alors

Théorème 1.6 1. Pour tout couple de complexes z_1, z_2 , $e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}$.

2. Pour tout nombre complexe z , $e^z \neq 0$

3. La dérivée de la fonction exponentielle est elle-même.

4. La restriction de l'exponentielle à \mathbb{R} est une fonction positive strictement croissante, telle que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0.$$

5. Il existe un nombre positif, noté π , tel que $e^{i\pi/2} = i$.

6. L'exponentielle est périodique de période $2i\pi$. De plus

$$e^{z_1} = e^{z_2} \iff z_1 = z_2 + 2ik\pi \quad \text{où } k \text{ est un entier.}$$

7. $t \mapsto e^{it}$ est une surjection de \mathbb{R} sur le cercle unité de \mathbb{C} . On note $\cos(t)$ et $\sin(t)$ les parties réelles et imaginaires de e^{it} .

8. $\forall w \neq 0 \exists z \in \mathbb{C}$ tel que $w = e^z$.

Démonstration :

1)

$$e^{z_1}e^{z_2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z_1^n}{n!} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{z_2^p}{p!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \sum_{n=0}^k \frac{k!}{(k-n)!n!} z_1^{k-n} z_2^n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (z_1 + z_2)^k = e^{z_1+z_2}.$$

2) C'est clair puisque d'après 1), $e^z e^{-z} = 1$.

3) Résulte immédiatement de la Proposition 1.4

4) Puisque $(e^{x/2})^2 = e^x$, e^x est positif, elle est croissante car sa dérivée est positive. Quand $x > 0$, $e^x \geq 1 + x$, donc $e^x \rightarrow +\infty$ quand $x \rightarrow +\infty$. Enfin $e^{-x} = 1/e^x$ donc la limite en $-\infty$ en résulte.

5) Pour tout réel t , e^{-it} est le conjugué de e^{it} (cela se voit sur la série entière). D'où

$$|e^{it}|^2 = e^{it}e^{-it} = e^0 = 1.$$

On pose

$$\cos t = \Re(e^{it}) \quad \text{et} \quad \sin t = \Im(e^{it}).$$

Par dérivation et identification, il vient $\cos' = -\sin$ et $\sin' = \cos$. De plus, en revenant à la définition de l'exponentielle, on a

$$\cos t = 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{t^{2n}}{(2n)!} + \dots$$

Ainsi, pour $t = 2$, on a une série alternée dont le terme général tend vers 0 en décroissant. Par un résultat bien connu sur les séries alternées, $\cos 2$ est compris entre $1 - \frac{2^2}{2!} = -1$ et $1 - \frac{2^2}{2!} + \frac{2^4}{4!} = -\frac{1}{3}$. Donc $\cos 2 < 0$, or $\cos 0 = 1$: le cosinus s'annule au moins une fois

sur $]0, 2[$. Soit t_0 la plus petite racine positive du cosinus. On pose par définition $\pi = 2t_0$. Il en résulte $\sin \frac{\pi}{2} = \pm 1$, or la fonction sinus est croissante sur $]0, \frac{\pi}{2}[$ et donc $\sin \frac{\pi}{2} = 1$ ce qui signifie $e^{i\pi/2} = i$ (et $e^{i\pi} = -1$, $e^{2i\pi} = 1$).

Une étude de fonction plus précise, en utilisant les résultats ci-dessus, (dérivée du cosinus est l'opposé du sinus) prouve en particulier que le cosinus ne prend la valeur 1 sur $[0, 2\pi]$ qu'en 0 et en 2π .

6) On a donc, d'après ce qui précède, $e^{z+2i\pi} = e^z e^{2i\pi} = e^z$ ce qui signifie que $2i\pi$ est une période de l'exponentielle.

Il reste à montrer que si $e^{z_1} = e^{z_2}$ alors $z_1 - z_2$ est un multiple entier de $2i\pi$. Ce qui revient à montrer que si $e^\alpha = 1$ alors $\alpha = 2ik\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$. Ecrivons $\alpha = a + ib$ et $e^\alpha = e^a e^{ib} = 1$. En passant au module, on déduit de l'égalité précédente que $a = 0$. Enfin en écrivant $b = 2k\pi + b'$ avec $0 \leq b' < 2\pi$ et en utilisant la remarque qui termine le point 5), on voit que $e^{ib'} = 1$ entraîne $b' = 0$ ce qui prouve le résultat.

7) Pour montrer la surjection, soit $w = u + iv$ un nombre complexe de module 1. Si u et v sont tous deux positifs ou nuls, comme le cosinus est une bijection de $[0, \pi/2]$ sur $[0, 1]$, il existe t tel que $\cos t = u$, on en déduit alors $\sin t = v$ et $w = e^{it}$. Les autres cas se déduisent de celui-ci par des considérations de symétrie.

8) Soit $w \neq 0$, on pose $\alpha = \frac{w}{|w|}$. D'après le point précédent, il existe $y \in \mathbb{R}$ tel que $\alpha = e^{iy}$ et d'après le point 4), il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $|w| = e^x$ d'où le résultat. \square

On peut étendre les fonctions cosinus et sinus au plan complexe tout entier en posant

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \quad \text{et} \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

mais attention, ces fonctions ne sont pas bornées sur \mathbb{C} (alors qu'elles le sont sur \mathbb{R}), prenez z imaginaire pur pour vous en convaincre.

On introduit aussi classiquement les fonctions cosinus hyperbolique et sinus hyperbolique par

$$\cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2} \quad \text{et} \quad \sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}.$$

1.3 Les fonctions logarithmes et puissances

1.3.1 Introduction

Il y a plusieurs façons d'aborder le problème de la construction d'une fonction logarithme dans le plan complexe. Par exemple

- on peut chercher à inverser l'exponentielle. En utilisant le point 8) du Théorème ci-dessus, on peut être tenté de poser, si $w = e^z$, $z = \log w$. Malheureusement, ce z n'est pas unique, puisque d'après le point 6) $z + 2ik\pi$ est également solution. Il faudra donc faire un choix.
- à partir de la forme trigonométrique $z = re^{i\theta}$, on peut avoir envie de poser $\log z = \ln r + i\theta$, mais là aussi, l'argument θ n'étant pas défini de manière unique, il faudra faire un choix.

Comme on souhaite que la fonction logarithme qu'on va définir soit holomorphe (et donc en particulier continue), il faut éviter le saut de l'argument quand on tourne autour de l'origine. D'où la nécessité d'une coupure du plan complexe (voir ci-dessous).

1.3.2 Définition des fonctions logarithmes

Définition 1.7 Construction d'une détermination du logarithme :

On choisit tout d'abord une demi-droite Δ d'origine 0, qu'on appellera la coupure. Puis sur $\mathbb{C} \setminus \Delta$ on choisit une détermination correspondante de l'argument, c'est-à-dire un intervalle ouvert de longueur 2π dans lequel variera l'argument. On pose alors

$$\log z = \ln |z| + i \arg z. \quad (1.9)$$

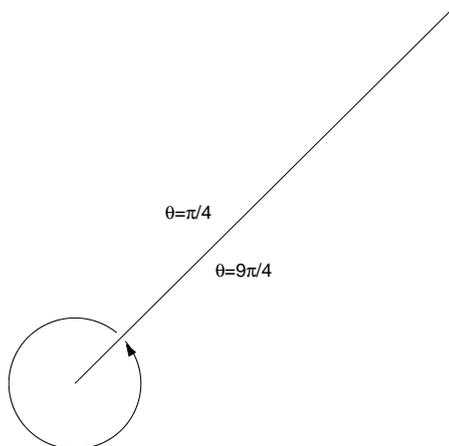


FIGURE 1.1 – Une coupure

A chaque choix différent de la coupure et/ou de la détermination correspond donc une fonction logarithme différente. Par extension, on appellera détermination du logarithme la donnée d'une coupure et d'une détermination associée.

Le choix le plus classique consiste à choisir la coupure $\Delta = \mathbb{R}^-$ des réels négatifs et la détermination $\arg z \in]-\pi, +\pi[$. C'est ce qu'on appelle **la détermination principale du logarithme**. Pour ce choix en particulier, on retrouve bien le logarithme usuel quand on prend la variable z réelle positive.

Néanmoins, pour certains problèmes, on pourra avoir envie de considérer le logarithme de nombres réels négatifs (voir par exemple certains calculs de résidus au chapitre 2). On pourra alors choisir pour coupure la demi-droite des nombres réels positifs et comme détermination, l'intervalle $]0, 2\pi[$.

1.3.3 Propriétés

Enonçons à présent une proposition qui contient les principales propriétés des fonctions logarithmes.

Proposition 1.8 – Sur le domaine $\mathbb{C} \setminus \Delta$, la détermination choisie du logarithme est holomorphe et sa dérivée vaut $(\log z)' = \frac{1}{z}$.

- Sur le domaine $\mathbb{C} \setminus \Delta$, deux déterminations du logarithme diffèrent d'un multiple entier de $2i\pi$.
- On a toujours $\exp(\log z) = z$, mais $\log(\exp z)$ n'est pas toujours égal à z .

Démonstration : On montre d'abord le troisième point. La formule $\exp(\log z) = z$ vient immédiatement de la définition (1.9). Donnons deux exemples montrant que la formule inverse peut être fautive. Choisissons la détermination principale du logarithme et prenons $z_1 = 3i\pi$ et $z_2 = 4i\pi$. On a $e^{3i\pi} = -1$, donc $\log(\exp z_1)$ n'est pas défini ici (la détermination principale du logarithme ne permet pas de calculer le logarithme de nombres réels négatifs), tandis que $e^{4i\pi} = 1$, donc $\log(\exp z_2) = \log 1 = 0 \neq z_2$. On montre à présent le premier point. Écrivons

$$\frac{\log(z+h) - \log(z)}{h} = \frac{\log(z+h) - \log(z)}{\exp(\log(z+h)) - \exp(\log(z))} \xrightarrow{h \rightarrow 0} \frac{1}{\exp(\log(z))} = \frac{1}{z}.$$

Enfin pour le deuxième point, on observe que la différence de deux déterminations du logarithme sur le même ouvert du type $\mathbb{C} \setminus \Delta$ est constante (car sa dérivée est nulle). En prenant alors la valeur en un point quelconque et en utilisant le point 6) du Théorème 1.6, on obtient que la différence des deux valeurs doit être un multiple entier de 2π .

Le domaine de définition (et d'holomorphic) d'une fonction logarithme est donc le plan complexe privé d'une demi-droite issue de l'origine. Maintenant, l'important étant de réaliser une coupure, on pourrait imaginer une coupure par une courbe continue autre qu'une demi-droite. Il y a quelques situations où il est effectivement plus intéressant de procéder ainsi, mais elles sont tellement rares que je n'insiste pas.

Nous verrons dans le chapitre suivant qu'une fonction holomorphe est toujours développable en série entière. Il est donc naturel de se demander quelle série représente une fonction logarithme. Comme l'origine n'est jamais dans le domaine de définition du logarithme, il est exclu de faire un développement en 0. Nous allons le faire pour la détermination principale du logarithme au voisinage du point 1 (notons qu'on retrouve bien entendu le résultat classique quand la variable est réelle).

Proposition 1.9 *La série*

$$T(u) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{u^n}{n}$$

a pour rayon de convergence 1 et pour u dans le disque unité ouvert, elle est égale à la détermination principale de $\log(1+u)$.

Démonstration : Que le rayon de convergence soit égal à 1 est classique (critère de D'Alembert par exemple). La série $T(u)$ est donc holomorphe sur le disque unité et sa dérivée est donnée par

$$T'(u) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u^{n-1} = \frac{1}{1+u} = (\log(1+u))'.$$

Donc $T(u) - \log(1+u) = cste = 0$ (prendre $u = 0$).

1.3.4 Fonctions puissances

Une question naturelle qui vient maintenant est : quel sens donner à z^α quand α est un nombre complexe? A part les cas élémentaires où α est entier relatif, il semble indispensable de passer par les fonctions logarithmes et exponentielles. C'est pourquoi on aura :

Définition 1.10 *Pour définir une fonction $z \mapsto z^\alpha$ avec α complexe, il est nécessaire de choisir d'abord une détermination du logarithme (et donc en particulier une coupure Δ). La fonction z^α est alors définie sur $\mathbb{C} \setminus \Delta$ par :*

$$z^\alpha := e^{\alpha \log z}.$$

Exemples :

La fonction \sqrt{z} ou $z^{1/2}$ n'est ainsi définie que sur un domaine du type $\mathbb{C} \setminus \Delta$. Ceci a pour effet de sélectionner une parmi les deux racines carrées d'un nombre complexe, ce choix dépendant évidemment du choix de la détermination. Par exemple, si on a besoin de calculer dans un problème "la" racine de -1 , il faudra évidemment choisir une coupure qui ne contienne pas -1 , la détermination principale du logarithme ne convenant pas, on pourra choisir d'enlever la droite des réels positifs. Si on choisit alors comme détermination de l'argument $]0, 2\pi[$, on aura (l'argument de -1 étant alors π)

$$(-1)^{1/2} = e^{\frac{1}{2}(\ln 1 + i\pi)} = e^{\frac{i\pi}{2}} = i$$

tandis que si on avait choisi comme détermination de l'argument $]-2\pi, 0[$, on aurait eu (l'argument de -1 étant alors $-\pi$)

$$(-1)^{1/2} = e^{\frac{1}{2}(\ln 1 - i\pi)} = e^{\frac{-i\pi}{2}} = -i.$$

Bien entendu, il est nécessaire de translater la coupure quand l'expression sous la racine ne s'annule pas à l'origine. Par exemple, si on veut définir la fonction $\sqrt{z-a}$ où a est un nombre complexe, il faudra choisir pour coupure une demi-droite issue de a . Ces considérations amènent à des questions assez délicates, par exemple quand il faut définir des fonctions du type $\sqrt{P(z)}$ où $P(z)$ est un polynôme en z . Nous y reviendrons lors des exercices.

1.4 Exercices du chapitre 1

Exercice 0 : Etudier la limite éventuelle en 0 des fonctions $g_1(z) = \frac{z^2 + \bar{z}^2}{z\bar{z}}$ et $g_2(z) = \frac{z^3 + \bar{z}^4}{z\bar{z}}$.

Exercice 1 : Trouver les points de \mathbb{C} où les fonctions suivantes sont holomorphes

$$f_1(z) = \Re e(z) \quad f_2(z) = |z|^2 \quad f_3(z) = |z|$$

Exercice 2 : Soit P la fonction définie sur \mathbb{R}^2 par

$$P(x, y) = x^3 + 2y - 3xy^2.$$

Montrer qu'il existe une fonction holomorphe $f = P + iQ$ sur \mathbb{C} et une seule telle que $Q(0,0) = 0$. Ecrire f en fonction de $z = x + iy$.

Exercice 3 : Soient $z_0 \in \mathbb{C}$, $r > 0$, $f \in \mathcal{H}(D(z_0, r))$. Montrer que, pour que f soit constante, il faut et il suffit que $\Re(f)$ ou $\Im(f)$ ou $|f|$ ou $\arg(f)$ soit constante.

Exercice 4 : Soient a et b deux réels. Déterminer des ouverts de \mathbb{C} sur lesquels on peut rendre la fonction $f(z) = \sqrt{(z-a)(z-b)}$ holomorphe.

Vérifier que f est holomorphe et injective sur le demi-plan $P = \{z \in \mathbb{C}, \Im(z) > 0\}$ et déterminer $f(P)$.

Exercice 5 : Soit $D = \{z \in \mathbb{C}, z = x + iy, 0 < x < \pi, y > 0\}$. On définit la fonction $f(z) = i \log \cos z$. Montrer que f est holomorphe sur D et déterminer $f(D)$.

Exercice 6 : Déterminer un ouvert Ω sur lequel la fonction $f(z) = \frac{1}{i} \log(iz + \sqrt{1-z^2})$ est holomorphe et vérifier que $\forall z \in \Omega, \sin(f(z)) = z$.

Chapitre 2

La formule de Cauchy et le Théorème des résidus

2.1 Quelques rappels sur les intégrales curvilignes

2.1.1 Définition

Dans toute la suite γ désignera un chemin fermé ou un arc du plan complexe, de classe C^1 par morceaux, paramétré par

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \quad t \in [a, b]$$

(les fonctions $x(t)$ et $y(t)$ pouvant évidemment être définies par différentes expressions sur des sous-intervalles de $[a, b]$ comme ce sera très souvent le cas dans la pratique).

On rappelle que si $\omega = A(x, y)dx + B(x, y)dy$ est une forme différentielle définie sur \mathbb{R}^2 , on pose

$$\int_{\gamma} \omega := \int_a^b [A(x(t), y(t))x'(t) + B(x(t), y(t))y'(t)] dt. \quad (2.1)$$

La définition d'une telle intégrale curviligne s'étend naturellement au cas des formes différentielles complexes. Si f est une fonction de \mathbb{C} dans \mathbb{C} avec $f = P + iQ$ comme au chapitre précédent, on considèrera la forme différentielle complexe

$$f(z)dz = (P(x, y) + iQ(x, y))(dx + idy) = P(x, y)dx - Q(x, y)dy + i(Q(x, y)dx + P(x, y)dy).$$

On pourra alors définir comme en (2.1) l'intégrale curviligne $\int_{\gamma} f(z)dz$.

Plus directement, quand γ sera paramétré en complexe par $z = \varphi(t)$, $t \in [a, b]$, on aura $\int_{\gamma} f(z)dz = \int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t) dt$.

2.1.2 Formule de Green-Riemann

Dans toute la suite, nous travaillerons souvent sur des compacts¹ (ensembles fermés bornés) du plan complexe. De manière à pouvoir définir des intégrales curvilignes sur le bord de ces compacts, nous serons amenés à mettre l'hypothèse suivante :

1. voir Annexe

Définition 2.1 On dira qu'un compact K du plan complexe est régulier si son bord ∂K est une courbe de classe C^1 par morceaux.

On orientera alors ∂K de façon canonique en imposant que quand on "se promène" sur ∂K , on ait toujours le compact sur sa gauche.

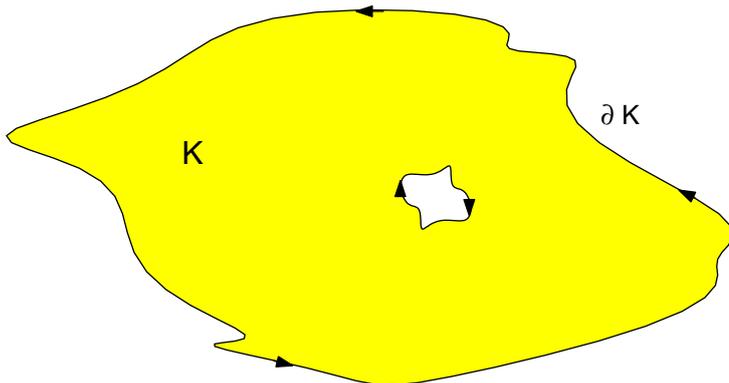


FIGURE 2.1 – Orientation du bord

On rappelle la formule de Green-Riemann qui permet de ramener le calcul d'une intégrale double sur un domaine (dans certains cas) à celui d'une intégrale curviligne sur le bord de ce domaine.

Théorème 2.2 (Formule de Green-Riemann) Soit K un compact régulier du plan complexe, ∂K son bord orienté et $\omega = A dx + B dy$ une forme différentielle, avec A et B de classe C^1 . Alors

$$\iint_K \left(\frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial y} \right) dx dy = \int_{\partial K} A dx + B dy. \quad (2.2)$$

2.1.3 Lemmes de majoration

Dans un certain nombre de cas (par exemple dans le calcul d'intégrales par la méthode des résidus que nous présenterons à la fin de ce chapitre), il est nécessaire de majorer des intégrales curvilignes, par exemple pour prouver que certaines intégrales du contour tendent vers 0 lorsqu'un certain paramètre varie. Donnons deux Lemmes classiques de majoration qui nous serviront souvent.

Lemme 2.3 Soit γ un chemin fermé de classe C^1 par morceaux, f une fonction continue sur γ , alors

$$\left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| \leq L(\gamma) \sup_{z \in \gamma} |f(z)| \quad (2.3)$$

où $L(\gamma)$ désigne la longueur du chemin γ .

Démonstration : C'est à peu près évident, je fais néanmoins la démonstration pour vous habituer à la manipulation des intégrales curvilignes. Notons $M = \sup_{z \in \gamma} |f(z)|$ et supposons le chemin γ paramétré par $z = \varphi(t)$, $t \in [a, b]$. Alors

$$\left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| = \left| \int_a^b f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt \right| \leq M \int_a^b |\varphi'(t)| dt = ML(\gamma)$$

puisque $|\varphi'(t)| dt = ds$ n'est autre que l'abscisse curviligne sur γ . \square

Un autre résultat un peu moins élémentaire et qui sera utile, en particulier, dans le calcul de certaines transformées de Fourier.

Lemme 2.4 (Jordan) *Soit f une fonction continue dans le demi-plan supérieur (sauf éventuellement en un nombre fini de points) et C_R le demi-cercle $C_R = \{z = Re^{i\theta}, \theta \in [0, \pi]\}$. On suppose que f tend vers 0 uniformément quand $|z| \rightarrow +\infty$. Alors, pour tout réel $a > 0$ fixé*

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{C_R} e^{iaz} f(z) dz = 0. \quad (2.4)$$

Démonstration : Du fait du paramétrage $z = Re^{i\theta}$, $\theta \in [0, \pi]$, on a

$$I(R) = \int_{C_R} e^{iaz} f(z) dz = \int_0^{\pi} \exp(iaRe^{i\theta}) f(Re^{i\theta}) Rie^{i\theta} d\theta.$$

Or $|\exp(iaRe^{i\theta})| = e^{-aR \sin \theta}$ d'où

$$|I(R)| \leq \int_0^{\pi} e^{-aR \sin \theta} R |f(Re^{i\theta})| d\theta \leq \sup_{C_R} |f| \int_0^{\pi} R e^{-aR \sin \theta} d\theta.$$

Par symétrie du sinus, $\int_0^{\pi} R e^{-aR \sin \theta} d\theta = 2 \int_0^{\pi/2} R e^{-aR \sin \theta} d\theta$. Or la fonction sinus est concave sur $[0, \pi/2]$, elle est donc située au-dessus de sa corde :

$$\forall \theta \in [0, \pi/2] \quad \sin \theta \geq \frac{2\theta}{\pi}.$$

On en déduit $e^{-aR \sin \theta} \leq e^{-aR \frac{2\theta}{\pi}}$ ou encore

$$\int_0^{\pi} R e^{-aR \sin \theta} d\theta \leq 2 \int_0^{\pi/2} R e^{-aR \frac{2\theta}{\pi}} d\theta \leq \frac{\pi}{a}.$$

Le résultat s'en déduit compte-tenu de l'hypothèse sur le comportement de f à l'infini. \square

2.2 Les formules de Cauchy

2.2.1 Première formule de Cauchy

Théorème 2.5 (Première formule de Cauchy) *Soit f une fonction holomorphe sur un ouvert Ω , K un compact régulier inclus dans Ω , alors*

$$\int_{\partial K} f(z) dz = 0. \quad (2.5)$$

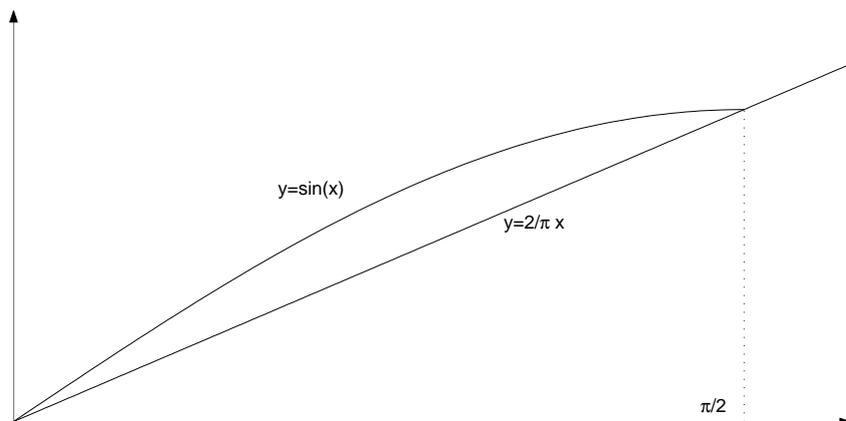


FIGURE 2.2 – Minoration du sinus

Démonstration : Je fais la démonstration en rajoutant l'hypothèse que f' est continue. La démonstration sans cette hypothèse étant un peu plus technique (en fait une conséquence future de la démonstration générale que je ne fais pas sera justement que f' est non seulement continue, mais de nouveau holomorphe). On a alors

$$\int_{\partial K} f(z) dz = \int_{\partial K} (P + iQ)(dx + idy) = \int_{\partial K} Pdx - Qdy + i \int_{\partial K} Pdy + Qdx.$$

En appliquant la formule de Green-Riemann (2.2), on obtient

$$\int_{\partial K} f(z) dz = \iint_K \left(-\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy + i \iint_K \left(\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial y} \right) dx dy = 0$$

compte tenu des conditions de Cauchy. \square

2.2.2 Remarques

Dans l'énoncé ci-dessus, peut-on remplacer le bord d'un compact K régulier inclus dans Ω par un chemin quelconque? NON, en général comme le prouve le contre-exemple fondamental suivant.

Prenons $\Omega = \mathbb{C}^*$ (\mathbb{C} privé de l'origine) et $f(z) = \frac{1}{z}$ qui est holomorphe sur \mathbb{C}^* et choisissons pour chemin fermé γ le cercle unité. On a

$$\int_{\gamma} \frac{1}{z} dz = \int_0^{2\pi} \frac{ie^{i\theta}}{e^{i\theta}} d\theta = 2i\pi \neq 0. \quad (2.6)$$

Le cercle unité γ est bien le bord d'un compact K , à savoir le disque unité fermé, mais celui-ci n'est pas inclus dans $\Omega = \mathbb{C}^*$! En fait, ce qui pose problème dans le contre-exemple ci-dessus est une propriété géométrique ou plutôt **topologique** du chemin γ et de l'ouvert Ω . En effet Ω ayant un trou, il est possible de construire un chemin qui fait le tour de ce trou et c'est ce phénomène qui permet ce contre-exemple. Si on veut l'éviter, on doit travailler sur un ouvert Ω "sans trou" : on appelle ce type d'ouverts des ouverts simplement connexes.

Définition 2.6 *On dira qu'un ouvert du plan complexe est simplement connexe s'il est homéomorphe² au disque unité ouvert.*

Il existe d'autres caractérisations possibles de la simple connexité. Par exemple, un ouvert borné connexe³ Ω est simplement connexe si son complémentaire dans \mathbb{C} est lui-même connexe. On peut aussi définir la simple connexité via les chemins fermés. On dira qu'un chemin γ est homotope à un point ou rétracte à un point dans Ω si on peut le déformer continûment en un point tout en restant à l'intérieur de Ω . Alors, un ouvert Ω est simplement connexe si tout chemin fermé dans Ω est homotope à un point.

Pour conclure, retenons que dans les deux cas favorables, Ω simplement connexe et γ quelconque ou Ω quelconque et γ homotope à un point, on aura toujours $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$.

Donnons à présent une autre application de la première formule de Cauchy.

Proposition 2.7 *Soit Ω un ouvert simplement connexe, alors toute fonction f holomorphe sur Ω possède une primitive F (i.e. F est holomorphe et $F' = f$) qu'on obtient par la formule*

$$F(z) = \int_{z_0}^z f(u) du \quad (2.7)$$

où l'intégrale curviligne (2.7) se calcule à l'aide de n'importe quel chemin joignant le point fixé z_0 à z (autrement dit la valeur de l'intégrale ne dépend pas du chemin choisi).

Démonstration : Prouvons tout d'abord que la formule (2.7) qui définit $F(z)$ ne dépend pas du chemin choisi. Si γ_1 et γ_2 sont deux arcs reliant z_0 à z , notons γ le chemin (fermé) consistant à faire d'abord γ_1 puis γ_2 en sens inverse. D'après ce qui précède, $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$ ce qui peut aussi s'écrire :

$$\int_{\gamma_1} f(z) dz - \int_{\gamma_2} f(z) dz = 0$$

ce qui prouve l'assertion.

Prouvons maintenant que $F'(z) = f(z)$. Fixons z et prenons h assez petit pour que le segment $[z, z+h]$ soit dans Ω . On a

$$\frac{F(z+h) - F(z)}{h} = \frac{1}{h} \int_{[z, z+h]} f(u) du = \int_0^1 f(z+th) dt$$

et il est immédiat de prouver que l'intégrale du membre de droite ci-dessus converge vers $f(z)$ quand h tend vers 0. \square

2.2.3 La deuxième formule de Cauchy

Théorème 2.8 (deuxième formule de Cauchy) *Soit f une fonction holomorphe sur un ouvert Ω , K un compact régulier inclus dans Ω , et z_0 un point de l'intérieur de K . Alors*

$$f(z_0) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial K} \frac{f(z)}{z - z_0} dz. \quad (2.8)$$

2. voir Annexe

3. voir Annexe

Démonstration : On choisit r assez petit pour que le disque $D(z_0, r)$ soit inclus dans l'intérieur de K . On considère alors le compact $K_r = K \setminus D(z_0, r) = \{z \in K, |z - z_0| \geq r\}$. Le bord de K_r est constitué, d'une part du bord de K (qui est orienté positivement) et

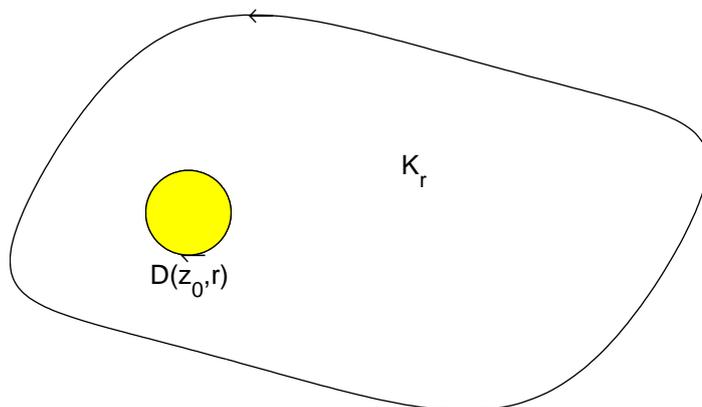


FIGURE 2.3 – Preuve de la formule de Cauchy

d'autre part du cercle de centre z_0 et de rayon r (qui est lui orienté négativement). Par construction, la fonction $\frac{f(z)}{z - z_0}$ est holomorphe sur K_r , on peut donc lui appliquer la première formule de Cauchy :

$$0 = \int_{\partial K_r} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \int_{\partial K} \frac{f(z)}{z - z_0} dz - \int_{\partial D(z_0, r)} \frac{f(z)}{z - z_0} dz.$$

Or

$$\int_{\partial D(z_0, r)} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + re^{i\theta})rie^{i\theta}}{re^{i\theta}} d\theta \rightarrow 2i\pi f(z_0) \text{ quand } r \rightarrow 0$$

d'où le résultat. \square

Cette deuxième formule de Cauchy montre que les valeurs prises par f à l'intérieur d'un compact quelconque K ne dépendent en fait que des valeurs que prend f sur le bord de K . Nous y reviendrons lors de la formule de la moyenne.

2.3 Points singuliers et développement en série de Laurent

2.3.1 Fonction holomorphe sur une couronne

Théorème 2.9 Soit f une fonction holomorphe sur une couronne $\mathcal{C} = \{z \in \mathbb{C}, R_1 < |z| < R_2\}$. Alors f admet sur \mathcal{C} un développement en série de Laurent de la forme

$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n z^n$. Ce développement est unique et a_n est donné par

$$a_n = \frac{1}{2i\pi} \int_{|u|=r} \frac{f(u)}{u^{n+1}} du \quad (2.9)$$

où r est un nombre quelconque, $R_1 < r < R_2$.

Démonstration : Fixons deux réels r_1 et r_2 tels que $R_1 < r_1 < r_2 < R_2$ et appliquons la deuxième formule de Cauchy sur le compact $K = \{r_1 \leq |z| \leq r_2\}$ qui est inclus dans la couronne \mathcal{C} . On note γ_{r_1} et γ_{r_2} les cercles de rayon r_1 et r_2 respectivement. Il vient pour z tel que $r_1 < |z| < r_2$ et compte-tenu de l'orientation :

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_{r_2}} \frac{f(u)}{u-z} du - \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_{r_1}} \frac{f(u)}{u-z} du. \quad (2.10)$$

Maintenant, quand u parcourt γ_{r_1} , on a $|u| < |z|$ et donc

$$\frac{1}{z-u} = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-\frac{u}{z}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u^n}{z^{n+1}},$$

tandis que quand u parcourt γ_{r_2} , on a $|z| < |u|$ et donc

$$\frac{1}{z-u} = -\frac{1}{u} \cdot \frac{1}{1-\frac{z}{u}} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{u^{n+1}}.$$

En remplaçant $\frac{1}{z-u}$ dans chacune des intégrales de (2.10) par son développement en série ci-dessus, on obtient le développement en série de Laurent recherché, les puissances positives de z provenant de l'intégrale sur γ_{r_2} et les puissances négatives de l'intégrale sur γ_{r_1} . \square

Remarque 2.1 – Tout ce qui précède est valable quand $R_1 = 0$ ou/et $R_2 = +\infty$.

- On peut aussi interpréter le développement en série de Laurent en disant que toute fonction holomorphe f sur une couronne $\{z, R_1 < |z| < R_2\}$ admet une décomposition canonique de la forme $f(z) = f_1(z) + f_2(z)$ avec f_1 holomorphe pour $|z| > R_1$ (c'est la série en puissances négatives de z) et f_2 holomorphe pour $|z| < R_2$ (c'est la série en puissances positives de z).
- La couronne peut aussi être centrée en un point z_0 autre que l'origine, le développement en série de Laurent s'écrivant alors :

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n.$$

2.3.2 Points singuliers d'une fonction holomorphe

Soit f une fonction holomorphe au voisinage d'un point z_0 **sauf** en z_0 . On veut étudier quel type de comportement peut avoir f au voisinage de z_0 . D'après le théorème précédent f admet un développement en série de Laurent sur la couronne $0 < |z - z_0| < \alpha$ du type

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n. \text{ Trois cas peuvent alors se présenter}$$

2.3.2.1 Singularité éliminable

$a_n = 0$ pour tout $n < 0$, f est alors holomorphe aussi en z_0 . On parle d'une singularité éliminable (c'est le même phénomène que le classique prolongement par continuité, en plus fort néanmoins). Exemple de tel cas :

$$f(z) = \frac{\sin z}{z}, \quad f(z) = \frac{e^z - 1}{z}, \quad f(z) = \frac{\cos z - 1}{z^2}.$$

On peut montrer en fait (on y reviendra au chapitre suivant) :

Proposition 2.10 z_0 est une singularité éliminable pour $f \iff f$ est bornée au voisinage de z_0 .

2.3.2.2 Pôle

$a_n = 0$ pour tout $n < -n_0 < 0$, on dit alors que z_0 est un pôle d'ordre n_0 (pôle simple dans le cas $n_0 = 1$). La fonction f s'écrit au voisinage de z_0 sous la forme :

$$f(z) = \frac{a_{-n_0}}{(z - z_0)^{n_0}} + \frac{a_{-n_0+1}}{(z - z_0)^{n_0-1}} + \dots + \frac{a_{-1}}{(z - z_0)} + f_2(z)$$

avec f_2 holomorphe au voisinage de z_0 . Ce cas est le plus fréquent, on le rencontre par exemple quand f est une fraction rationnelle ou, plus généralement, le quotient de deux fonctions holomorphes.

Définition 2.11 On appelle **fonction méromorphe** le quotient de deux fonctions holomorphes.

2.3.2.3 Singularité essentielle

Il existe une infinité d'entiers négatifs n tels que $a_n \neq 0$, dans ce cas on dit que z_0 est une singularité essentielle pour f . Exemple : $f(z) = \exp \frac{1}{z}$. Pour ce type de points, on démontre le Théorème suivant dû à Picard (que je cite pour information) :

Théorème 2.12 (Picard) Si z_0 est une singularité essentielle de la fonction f , alors l'image par f de toute couronne $0 < |z - z_0| < \varepsilon$ est le plan \mathbb{C} tout entier ou bien \mathbb{C} privé d'un point.

2.4 La formule des résidus

2.4.1 Le théorème des résidus

Définition 2.13 Soit f une fonction holomorphe au voisinage du point z_0 . On appelle **résidu** de f en z_0 , le coefficient a_{-1} du terme $\frac{1}{z - z_0}$ dans le développement en série de Laurent de f au voisinage de z_0 , on le note $\text{res}(f, z_0)$.

Théorème 2.14 (Théorème des résidus) *Soit f une fonction holomorphe sur un ouvert contenant un compact régulier K , sauf en un nombre fini de points z_1, z_2, \dots, z_n contenus dans K . Alors*

$$\int_{\partial K} f(z) dz = 2i\pi \sum_{k=1}^n \text{res}(f, z_k). \quad (2.11)$$

Démonstration : Comme pour la formule de Cauchy, on considère le compact K_r égal à K privé de la réunion des (petites) boules $B(z_k, r)$. on a alors

$$0 = \int_{\partial K_r} f(z) dz = \int_{\partial K} f(z) dz - \sum_{k=1}^n \int_{|z-z_k|=r} f(z) dz.$$

Or, pour r assez petit, on peut remplacer f par son développement en série de Laurent dans le calcul de chaque intégrale $\int_{|z-z_k|=r} f(z) dz$ (la convergence est uniforme). Seul le terme en $\frac{1}{z-z_k}$ aura une contribution non nulle (pour tous les autres on intègre une $e^{im\theta}$ entre 0 et 2π) et on obtient bien $\int_{|z-z_k|=r} f(z) dz = 2i\pi \text{res}(f, z_k)$ ce qui prouve le résultat. \square

2.4.2 Calcul pratique du résidu

2.4.2.1 Cas d'un pôle simple

Dans ce cas, $f(z)$ s'écrit :

$$f(z) = \frac{a_{-1}}{z-z_0} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n = \frac{g(z)}{z-z_0}$$

où g est la fonction holomorphe au voisinage de z_0 dont le développement en série est donné par $g(z) = a_{-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^{n+1}$. On a donc $\text{res}(f, z_0) = a_{-1} = g(z_0)$. Autrement dit, dans le cas d'un pôle simple :

$$\text{res}(f, z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z-z_0)f(z). \quad (2.12)$$

Lorsque f s'écrit naturellement comme le quotient de deux fonctions holomorphes :

$f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ avec z_0 racine simple de Q , la formule (2.12) peut se réécrire

$$\text{res}(f, z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{P(z)}{\frac{Q(z)}{z-z_0}}.$$

Or

$$\frac{Q(z)}{z-z_0} = \frac{Q(z) - Q(z_0)}{z-z_0} \rightarrow Q'(z_0) \quad \text{quand } z \rightarrow z_0,$$

d'où l'autre formule de calcul du résidu en un pôle simple :

$$\text{Si } f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}, \text{ alors } \text{res}(f, z_0) = \frac{P(z_0)}{Q'(z_0)}. \quad (2.13)$$

2.4.2.2 Cas d'un pôle multiple

Dans le cas d'un pôle d'ordre $m \geq 2$, $f(z)$ s'écrit :

$$f(z) = \sum_{k=-m}^{\infty} a_k (z - z_0)^k = \frac{g(z)}{(z - z_0)^m}$$

avec g holomorphe au voisinage de z_0 et qui a pour développement

$$g(z) = a_{-m} + a_{-m+1}(z - z_0) + \dots + a_{-1}(z - z_0)^{m-1} + a_0(z - z_0)^m + \dots$$

On obtient donc le résidu en recherchant le coefficient de $(z - z_0)^{m-1}$ dans le développement de Taylor de $g(z) = (z - z_0)^m f(z)$ au voisinage de z_0 .

Dans la pratique, il y a deux façons de procéder

- Ou bien on pose $z = z_0 + h$ et on fait un développement limité à l'ordre $m - 1$ de $h^m f(z_0 + h)$. La résidu est alors le coefficient du terme en h^{m-1} .
- Ou bien on dérive $m - 1$ fois la fonction $(z - z_0)^m f(z)$ et on fait $z = z_0$:

$$\operatorname{res}(f, z_0) = \frac{1}{(m-1)!} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} ((z - z_0)^m f(z)) \Big|_{z=z_0}. \quad (2.14)$$

2.4.2.3 Cas d'une singularité essentielle

Dans ce cas, il n'y a guère d'autre méthode que d'écrire explicitement le développement en série de Laurent de la fonction.

2.5 Application au calcul d'intégrales

Dans ce paragraphe, nous allons montrer sur quelques exemples types, comment la formule des résidus permet de calculer des intégrales. On va ainsi pouvoir obtenir la valeur d'intégrales pour lesquelles les moyens classiques (utilisation de primitives, intégration par parties, changement de variables) étaient inopérants. On va aussi simplifier le calcul de certaines intégrales qui s'obtenait auparavant par des calculs assez lourds. Cette méthode est l'un des grands succès de la Théorie des fonctions holomorphes.

Dans chacun des paragraphes ci-dessous, nous donnerons rapidement le principe de la méthode et un exemple, mais il est bien évident que c'est en pratiquant qu'on apprend et qu'il ne faudra pas se contenter de ces quelques exemples et de ceux vus en T.D. : à vous de vous entraîner.

2.5.1 Intégrales du type $\int_0^{2\pi} F(\cos t, \sin t) dt$

Dans l'intégrale ci-dessus, F est une fraction rationnelle dont on supposera qu'elle n'a pas de pôles sur le cercle unité.

La méthode consiste alors à poser $z = e^{it}$ de sorte que quand t parcourt $[0, 2\pi]$, z parcourt le cercle unité (dans le sens direct) qui est le bord du compact $\overline{\mathbb{D}}$ qu'est le disque unité

fermé. En remplaçant $\cos t$ par $\frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})$, $\sin t$ par $\frac{1}{2i}(z - \frac{1}{z})$ et dt par $\frac{dz}{iz}$ on voit qu'on est ramené au calcul de

$$\int_{\partial\mathbb{D}} F\left(\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right), \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right)\right) \frac{dz}{iz}$$

où l'expression à intégrer est une fraction rationnelle en z . Pour calculer cette intégrale, on utilise la formule des résidus (2.11) étant entendu qu'on a seulement besoin de calculer le résidu de la fonction aux pôles situés **à l'intérieur** du disque unité.

Exemple : Soit à calculer

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{dt}{a + \sin t}$$

où a est un nombre réel, $a > 1$. D'après ce qui précède, on a

$$I = \int_{\partial\mathbb{D}} \frac{1}{a + \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right)} \frac{dz}{iz} = \int_{\partial\mathbb{D}} \frac{2}{z^2 + 2iaz - 1} dz.$$

Parmi les zéros de $z^2 + 2iaz - 1$, seul $z_0 = -ia + i\sqrt{a^2 - 1}$ est dans le disque unité et c'est un pôle simple de la fonction à intégrer. La formule des résidus fournit alors

$$I = 2i\pi \operatorname{res}\left(\frac{2}{z^2 + 2iaz - 1}, z_0\right) = 2i\pi \frac{2}{2z_0 + 2ia} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2 - 1}}.$$

2.5.2 Intégrales du type $\int_{-\infty}^{+\infty} F(x) dx$

Dans l'intégrale ci-dessus, F est une fonction méromorphe qui n'a pas de pôles sur la droite réelle (de sorte que $F(x)$ est continue sur \mathbb{R}) et qui n'a qu'un nombre fini de pôles. On doit supposer en outre que l'intégrale ci-dessus est convergente, pour cela il suffit par exemple de supposer

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} |x|^\alpha |F(x)| = 0 \quad \text{pour un } \alpha > 1 \quad (2.15)$$

ce que nous supposons désormais.

Pour calculer l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F(x) dx$$

nous allons intégrer la fonction $F(z)$ sur le bord γ d'un demi-cercle de centre O , de rayon R situé soit dans le demi-plan supérieur, soit dans le demi-plan inférieur (le choix se fera en fonction d'éléments qui apparaîtront clairement un peu plus loin) puis nous allons faire tendre R vers l'infini. Puisque F n'a qu'un nombre fini de pôles, pour R assez grand, F n'a pas de pôles sur le bord γ et on peut appliquer la formule des résidus : l'intégrale $\int_\gamma F(z) dz$ est égale à $2i\pi$ fois la somme des résidus en les pôles situés à l'intérieur du contour γ . Or l'intégrale sur γ se décompose naturellement en la somme de deux intégrales : l'une sur le segment $[-R, R]$ (qui tend vers l'intégrale cherchée quand $R \rightarrow \infty$), l'autre sur le demi-cercle dont il faut s'assurer qu'elle tend vers 0 quand $R \rightarrow \infty$. On peut énoncer un certain nombre de résultats généraux qui assure que cette dernière propriété est vraie sous certaines hypothèses sur F , mais il me semble préférable de le

vérifier à la main dans chaque cas, c'est en général très simple et ça évite de faire des erreurs. Tout ceci sera certainement plus clair après les deux exemples que nous traitons ci-dessous.

Exemple 1 : Soit à calculer

$$I_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^4}.$$

La fonction à intégrer est ici $F(z) = \frac{1}{1+z^4}$ qui est holomorphe sur \mathbb{C} privé des pôles $z_1 = e^{i\pi/4}, z_2 = e^{3i\pi/4}, z_3 = e^{5i\pi/4}, z_4 = e^{7i\pi/4}$. Les deux premiers pôles sont situés dans le demi-plan supérieur, les deux autres dans le demi-plan inférieur. Dans le cas présent, il est indifférent (pour des raisons de symétrie évidentes) de choisir comme contour d'intégration le demi-cercle supérieur ou le demi-cercle inférieur. Choisissons donc le demi-cercle supérieur (avec son diamètre) représenté ci-dessous. Nous noterons γ le contour complet et γ_R le demi-cercle, ensemble des points $z = Re^{i\theta}$ avec θ variant entre 0 et π . Dès que $R > 1$, le contour d'intégration contient les deux pôles z_1 et z_2 .

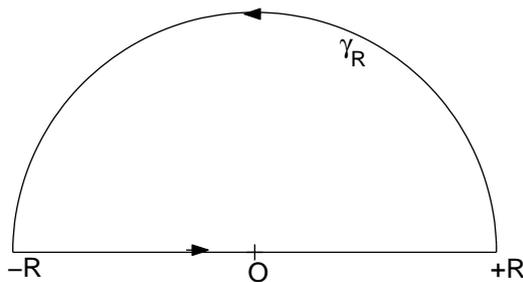


FIGURE 2.4 – Le demi-cercle supérieur

Calculons les résidus de F en ces pôles. Comme il s'agit de pôles simples (F' ne s'annule pas en z_1 et z_2), on peut utiliser la formule (2.13) qui donne

$$\text{res}(F, z_i) = \frac{1}{4z_i^3}$$

de sorte que

$$\text{res}(F, z_1) + \text{res}(F, z_2) = \frac{1}{4} (e^{-3i\pi/4} + e^{-9i\pi/4}) = \frac{-i\sqrt{2}}{4}.$$

Appliquons alors le théorème des résidus :

$$\int_{-R}^R F(x) dx + \int_{\gamma_R} F(z) dz = 2i\pi(\text{res}(F, z_1) + \text{res}(F, z_2)) = \frac{\pi}{\sqrt{2}}. \quad (2.16)$$

Si nous pouvons prouver que $\int_{\gamma_R} F(z) dz$ tend vers 0 quand $R \rightarrow +\infty$, nous aurons obtenu par passage à la limite dans (2.16), la relation $I_1 = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$.

Or, on a facilement

$$\int_{\gamma_R} F(z) dz = \int_0^\pi \frac{Rie^{i\theta} d\theta}{1 + R^4 e^{4i\theta}}$$

d'où (en utilisant l'inégalité triangulaire $|a + b| \geq |a| - |b|$)

$$\left| \int_{\gamma_R} F(z) dz \right| \leq \int_0^\pi \frac{Rd\theta}{R^4 - 1} = \frac{\pi R}{R^4 - 1} \rightarrow 0 \text{ quand } R \rightarrow \infty.$$

Exemple 2 : Soit à calculer la transformée de Fourier de la fonction $\frac{1}{1+x+x^2}$, c'est-à-dire l'intégrale

$$I_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i\omega x} dx}{1+x+x^2}$$

où ω est un paramètre réel. Pour des raisons qui apparaîtront clairement plus loin, nous serons amenés à intégrer

- sur le demi-cercle supérieur (avec son diamètre) noté γ^+ , quand $\omega \leq 0$
- sur le demi-cercle inférieur (avec son diamètre) noté γ^- , quand $\omega \geq 0$.

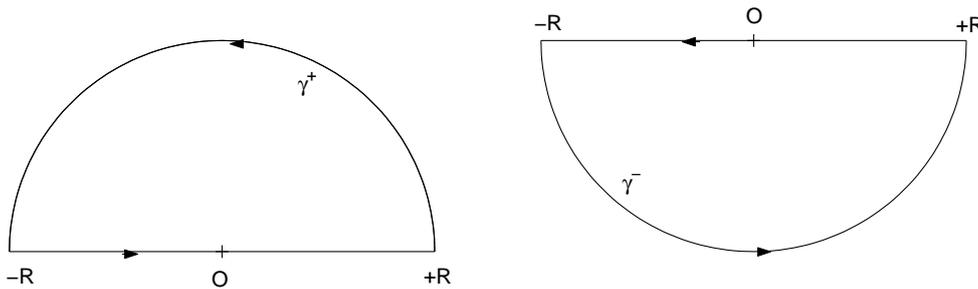


FIGURE 2.5 – Les contours pour une transformée de Fourier

Traisons d'abord le cas $\omega \leq 0$. L'unique pôle de la fonction méromorphe $F(z) = \frac{e^{-i\omega z}}{1+z+z^2}$ situé à l'intérieur du contour étant $j = e^{2i\pi/3}$ (qui est un pôle simple), on a

$$\int_{\gamma^+} F(z) dz = 2i\pi \operatorname{res}(F, j) = 2i\pi \frac{e^{-i\omega j}}{2j+1} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}} e^{\frac{\omega\sqrt{3}}{2}} \left(\cos \frac{\omega}{2} + i \sin \frac{\omega}{2} \right).$$

De même que ci-dessus, on a $\int_{\gamma^+} F(z) dz = \int_{-R}^R F(x) dx + \int_{\gamma_R^+} F(z) dz$. Nous voulons faire tendre R vers $+\infty$ et montrer que l'intégrale sur γ_R^+ tend vers 0. Pour cela, nous pouvons invoquer le Lemme de Jordan 2.4. On peut également refaire le calcul à la main, en utilisant le fait que le demi-cercle est paramétré par $z = Re^{i\theta}$ avec θ variant entre 0 et π ce qui ne présente pas de difficultés dans ce cas. On a donc prouvé que

$$\text{si } \omega \leq 0 \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i\omega x} dx}{1+x+x^2} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}} e^{\frac{\omega\sqrt{3}}{2}} \left(\cos \frac{\omega}{2} + i \sin \frac{\omega}{2} \right).$$

Dans le cas $\omega \geq 0$, on intègre sur l'autre demi-cercle. Il y a deux modifications à faire dans le calcul précédent. La première est liée à l'orientation du contour. Comme on le voit sur la Figure, le segment $[-R, R]$ est parcouru dans le sens contraire, c'est-à-dire de R à $-R$. Il conviendra de ne pas oublier de mettre un signe $-$ devant le résultat final. L'autre modification porte simplement sur le pôle qui est maintenant j^2 . Le lecteur vérifiera aisément que

$$\text{si } \omega \geq 0 \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i\omega x} dx}{1+x+x^2} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}} e^{-\frac{\omega\sqrt{3}}{2}} \left(\cos \frac{\omega}{2} + i \sin \frac{\omega}{2} \right).$$

2.5.3 Intégrales du type $\int_0^{+\infty} \frac{F(x)}{x^\alpha} dx$

Dans l'intégrale ci-dessus, F est une fonction méromorphe qui n'a pas de pôles sur la demi-droite réelle positive et qui n'a qu'un nombre fini de pôles et α un réel, $0 < \alpha < 1$. On doit supposer en outre que l'intégrale ci-dessus est convergente, pour cela il suffit par exemple de supposer

$$|F(x)| = O\left(\frac{1}{x^\beta}\right) \quad \text{pour un } \beta \geq 1 \quad (2.17)$$

ce que nous supposons désormais.

Pour calculer l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{F(x)}{x^\alpha} dx$$

nous allons intégrer la fonction $F(z)$ sur le contour γ défini de la façon suivante (voir figure ci-dessous) : on parcourt d'abord l'axe réel de $\varepsilon > 0$ (qui sera amené à tendre vers 0) à $R > 0$ (qui sera amené à tendre vers $+\infty$), puis le cercle γ_R de centre 0 et de rayon R dans le sens direct, puis l'axe réel de R à ε et enfin le cercle γ_ε de centre 0 et de rayon ε dans le sens indirect. Pourquoi avons-nous choisi un contour si compliqué ?

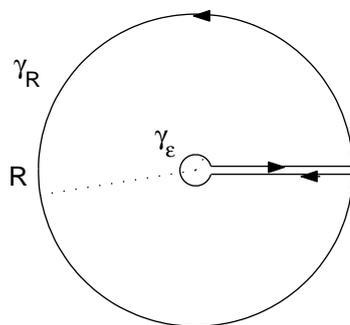


FIGURE 2.6 – Contour pour une fonction logarithme ou puissance

Comme la définition de z^α fait intervenir le logarithme complexe (voir chapitre 1), il

est nécessaire de travailler sur un domaine comportant une coupure afin que la fonction qu'on intègre $\frac{F(z)}{z^\alpha}$ soit holomorphe à l'intérieur du contour. Bien sûr, il convient de préciser quelle est la détermination du logarithme choisie. En général, nous prendrons pour un contour comme celui-ci, la détermination consistant à enlever la demi-droite des réels positifs et à prendre l'argument dans l'intervalle $]0, 2\pi[$. En toute rigueur, nous ne pouvons pas appliquer le Théorème des résidus sur le contour décrit ci-dessus, car il faut être en principe sur le bord d'un compact lui-même inclus dans l'ouvert où la fonction est holomorphe ce qui n'est pas tout à fait le cas ici. Pour contourner cette difficulté, il conviendrait de modifier très légèrement le contour choisi en décollant légèrement les segments $[\varepsilon, R]$ et $[R, \varepsilon]$ de l'axe réel, par exemple en les prenant respectivement sur la droite d'ordonnée ε^2 et sur la droite d'ordonnée $-\varepsilon^2$. Comme on fait tendre ε vers 0 par la suite, on voit que ça ne changerait pas grand chose.

Comme 0 n'est pas à l'intérieur du contour, les seuls pôles de $\frac{F(z)}{z^\alpha}$ sont ceux de F et on peut appliquer la formule des résidus pour calculer $\int_\gamma \frac{F(z)}{z^\alpha} dz$. Maintenant, quand on détaille sur les 4 portions qui composent γ , que deviennent chacune des 4 intégrales si on fait tendre ε vers 0 et R vers l'infini ?

- La première intégrale, qui s'écrit $\int_\varepsilon^R \frac{F(x)}{x^\alpha} dx$ va tendre vers l'intégrale cherchée.
- Il faudra montrer que la deuxième et la quatrième intégrale (celles sur les cercles) tendent vers 0.
- Quant à l'intégrale sur le segment $[R, \varepsilon]$ (ou plutôt, compte-tenu de ce qui a été dit précédemment sur ce segment légèrement translaté vers le bas), il ne faut pas oublier que comme on a fait un tour complet, l'argument des nombres complexes vaut maintenant 2π (ou tend vers 2π). Ainsi tout nombre complexe z sur ce segment aura pour module un nombre réel x compris entre ε et R et pour argument 2π . Donc, en utilisant la définition de la détermination principale du logarithme

$$z^\alpha = e^{\alpha \log z} = e^{\alpha(\ln x + 2i\pi)} = x^\alpha e^{2i\pi\alpha}.$$

Finalement

$$\int_{[R, \varepsilon]} \frac{F(z)}{z^\alpha} dz = - \int_\varepsilon^R e^{-2i\pi\alpha} \frac{F(x)}{x^\alpha} dx. \quad (2.18)$$

Exemple : Soit à calculer

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha(1+x)} \quad 0 < \alpha < 1.$$

Le seul pôle de la fonction $\frac{1}{z^\alpha(1+z)}$ situé à l'intérieur du contour étant $z = -1$ (qui est simple), on a

$$\int_\gamma \frac{dz}{z^\alpha(1+z)} = 2i\pi \operatorname{res}\left(\frac{1}{z^\alpha(1+z)}, -1\right) = \frac{2i\pi}{e^{i\pi\alpha}}.$$

Montrons, par exemple, que $\int_{\gamma_\varepsilon} \frac{dz}{z^\alpha(1+z)} \rightarrow 0$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$. Les points du cercle se

paramétrant par $z = \varepsilon e^{i\theta}$, $\theta \in [2\pi, 0]$, on a

$$\int_{\gamma_\varepsilon} \frac{dz}{z^\alpha(1+z)} = - \int_0^{2\pi} \frac{\varepsilon i e^{i\theta} d\theta}{e^{\alpha(\ln \varepsilon + i\theta)}(1 + \varepsilon e^{i\theta})}.$$

Soit

$$\left| \int_{\gamma_\varepsilon} \frac{dz}{z^\alpha(1+z)} \right| \leq \int_0^{2\pi} \frac{\varepsilon d\theta}{\varepsilon^\alpha(1-\varepsilon)} \rightarrow 0 \quad \text{quand } \varepsilon \rightarrow 0$$

car $\alpha < 1$. De la même manière, on montrerait que

$$\left| \int_{\gamma_R} \frac{dz}{z^\alpha(1+z)} \right| \leq \int_0^{2\pi} \frac{R d\theta}{R^\alpha(R-1)} \rightarrow 0$$

quand $R \rightarrow +\infty$, en utilisant cette fois le fait que $\alpha > 0$.

En utilisant alors la discussion qui précède et, en particulier, (2.18), on a donc prouvé en passant à la limite quand $\varepsilon \rightarrow 0$ et $R \rightarrow +\infty$ que

$$(1 - e^{-2i\pi\alpha})I = \frac{2i\pi}{e^{i\pi\alpha}}$$

soit encore

$$I = \frac{\pi}{\sin \pi\alpha}.$$

Nous verrons d'autres exemples de calculs d'intégrales par la méthode des résidus en T.D., la méthodologie étant le plus souvent la même :

1. On choisit le contour sur lequel on intègre.
2. On vérifie que la fonction à intégrer est holomorphe à l'intérieur de ce contour sauf en un nombre fini de points (ses singularités).
3. On calcule le résidu de la fonction à intégrer en chacun des points singuliers situé à l'intérieur du contour.
4. On applique la formule des résidus et on montre que les intégrales *parasites* (celles qui ne nous intéressent pas pour le résultat final) tendent vers 0 quand on fait tendre les paramètres vers 0 ou $+\infty$.

2.6 Exercices du chapitre 2

Exercice 1 : Prouver le Théorème de Picard pour la fonction $f(z) = \exp \frac{1}{z}$.

Exercice 2 : Calculer les intégrales suivantes par la méthode des résidus.

- a) $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{1 - 2p \cos x + p^2} \quad (-1 < p < 1)$
- b) $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{(p + q \cos x)^2} \quad (p > q > 0)$
- c) $\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 x dx}{(1 - 2\alpha \cos x + \alpha^2)(1 - 2\beta \cos x + \beta^2)} \quad (\alpha, \beta \in]-1, 1[\setminus \{0\}).$

Exercice 3 : Calculer les intégrales suivantes par la méthode des résidus.

- a) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(1+x+x^2)^2}$.
- b) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\omega x} dx}{x^2+a^2}$ (a réel non nul).
- c) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x^2-a^2)\sin x dx}{(x^2+a^2)x}$ (a réel positif).

Exercice 4 : Calculer les intégrales suivantes par la méthode des résidus.

$$a) \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha(1+x^2)} \quad b) \int_0^{+\infty} \frac{\ln x dx}{(1+x^2)^2} \quad c) \int_0^{+\infty} \frac{\ln x dx}{1+x^3}.$$

Exercice 5 : Calculer les intégrales suivantes par la méthode des résidus en utilisant le contour suggéré.

$$a) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{xe^{x/2} dx}{e^{2x}+1}$$

sur le rectangle $\Gamma_R = \{-R \leq x \leq R, 0 \leq y \leq \pi\}$.

$$b) \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^n}$$

sur le secteur circulaire $\gamma_R = \{z; |z| \leq R, 0 \leq \arg z \leq \frac{2\pi}{n}\}$, n est un entier, $n \geq 2$.

$$c) \int_0^\pi \ln(\sin x) dx$$

sur le contour défini par $\{z = x + iy; 0 \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq R, |z| \geq \varepsilon, |\pi - z| \geq \varepsilon\}$.

Chapitre 3

Conséquences de la Formule de Cauchy

3.1 Propriété de moyenne, principe du maximum

3.1.1 La propriété de moyenne

Rappelons tout d'abord la formule de Cauchy.

$$f(z_0) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial K} \frac{f(z)}{z - z_0} dz. \quad (3.1)$$

Dans (3.1), f est une fonction holomorphe sur un ouvert Ω , K un compact régulier inclus dans Ω , et z_0 un point de l'intérieur de K . Choisissons pour compact K un disque centré en z_0 et de rayon r inclus dans Ω , il vient (en utilisant la paramétrisation des points du cercle $z = z_0 + re^{i\theta}$, $\theta \in [0, 2\pi]$)

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta}) d\theta. \quad (3.2)$$

Autrement dit la valeur de f au centre du cercle s'obtient comme moyenne des valeurs prises par f sur le bord du cercle. Pour cette raison, la formule (3.2) est appelée **Formule de la moyenne**. En dimension 1, les seules fonctions qui vérifient cette propriété de moyenne sont les fonctions affines (c'est un exercice classique), on voit donc, là encore que la théorie des fonctions holomorphes est beaucoup plus riche.

En utilisant maintenant le fait que toute fonction harmonique est, sur un disque la partie réelle d'une fonction holomorphe et en prenant la partie réelle de l'égalité (3.2), on obtient :

Proposition 3.1 *La formule de la moyenne (3.2) est vraie pour les fonctions harmoniques.*

Remarquons que la réciproque est également vraie (une fonction réelle qui vérifie la formule de la moyenne est harmonique), mais c'est un peu plus compliqué à démontrer.

3.1.2 Le principe du maximum

Théorème 3.2 (Principe du maximum) *Soit f une fonction holomorphe sur un ouvert Ω . Supposons que $|f|$ possède un maximum local en un point $z_0 \in \Omega$ (c'est-à-dire que $|f(z)| \leq |f(z_0)|$ pour z voisin de z_0). Alors f est constante au voisinage de z_0 .*

Une autre formulation du principe du maximum peut-être plus explicite est la suivante

Théorème 3.3 (Principe du maximum, bis) *Soit f une fonction holomorphe sur un ouvert connexe, borné Ω et continue sur sa fermeture $\overline{\Omega}$. Alors $|f|$ atteint son maximum sur la frontière de Ω . De plus, si le maximum est également atteint à l'intérieur alors f est constante sur Ω .*

Le passage du Théorème 3.2 au Théorème 3.3 est facile, il reste à démontrer le Théorème 3.2.

Démonstration du Théorème 3.2 : Quitte à multiplier par une constante bien choisie, on peut toujours supposer que $f(z_0)$ est réel positif. On a alors, pour tout z voisin de z_0 , par hypothèse $\Re(f(z)) \leq |f(z)| \leq |f(z_0)| = \Re(f(z_0))$. Ainsi la fonction harmonique $g(z) = \Re(f(z_0) - f(z))$ ne prend que des valeurs réelles positives dans un voisinage de z_0 . Mais d'après la formule de la moyenne appliquée sur un petit cercle situé dans ce voisinage, on a

$$0 = g(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(z_0 + re^{i\theta}) d\theta \geq 0. \quad (3.3)$$

Comme la fonction qu'on intègre est continue, l'égalité (3.3) n'est possible que si g est identiquement nulle (dans un voisinage de z_0). Maintenant, si la fonction holomorphe $f(z_0) - f(z)$ a une partie réelle nulle, c'est qu'elle est identiquement constante (utiliser les conditions de Cauchy ou l'Exercice 3 du Chapitre 1. Mais cette constante ne peut être que 0 (prendre $z = z_0$). Ceci achève la preuve du Théorème 3.2. \square

Remarque 3.1 – Par un argument topologique classique utilisant la définition de la connexité, on peut montrer que le voisinage de z_0 sur lequel la fonction f est constante dans le Théorème 3.2 est la composante connexe¹ de Ω qui contient z_0 .

– La même démonstration que ci-dessus peut être recopiée pour les fonctions (réelles) harmoniques. On en déduit que le principe du maximum sous sa version 3.2 ou 3.3 est valable pour les fonctions harmoniques.

– L'hypothèse de bornitude de Ω est indispensable dans le Théorème 3.3 comme le prouve le contre-exemple suivant. Prenons pour Ω la bande horizontale

$\Omega = \{z = x + iy, -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}\}$ et pour f la fonction $f(z) = \exp(\exp z)$. Quand z est sur le bord de Ω , on a $z = x \pm i\frac{\pi}{2}$ et donc $|f(z)| = |\exp(\pm ie^x)| = 1$. Mais quand $x \rightarrow +\infty$ sur la droite réelle, il est clair que $f(x) \rightarrow +\infty$ ce qui montre bien que le Principe du maximum deuxième version ne s'applique pas dans ce cas (alors que la première version reste évidemment vraie).

1. voir Annexe

3.2 Dérivabilité et analyticité

3.2.1 Une fonction holomorphe est indéfiniment dérivable

Théorème 3.4 *Une fonction holomorphe sur un ouvert Ω est indéfiniment holomorphe sur cet ouvert et on a les formules de Cauchy :*

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2i\pi} \int_{\partial K} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial K} \frac{f^{(n)}(z)}{z - z_0} dz. \quad (3.4)$$

On peut prouver ce résultat de deux manières différentes : soit en utilisant l'analyticité (c'est-à-dire la propriété qu'ont les fonctions holomorphes d'être développables en série entière) qui sera prouvée au paragraphe suivant, soit directement grâce à la formule de Cauchy et à un Théorème d'holomorphie sous le signe somme que j'énonce maintenant car il a son intérêt propre et qu'il nous réservera dans le dernier chapitre.

Théorème 3.5 (Holomorphie sous le signe somme) *Soit I un intervalle (borné ou non) de la droite réelle et Ω un ouvert du plan complexe. On considère une fonction $f(t, z)$ définie sur $I \times \Omega$ à valeurs dans \mathbb{C} et qui vérifie*

- (i) $t \mapsto f(t, z)$ est mesurable pour tout $z \in \Omega$ et $z \mapsto f(t, z)$ est holomorphe pour presque tout $t \in I$.
- (ii) Il existe une fonction $g(t)$ positive, intégrable sur I telle que $|f(t, z)| \leq g(t)$ pour tout $z \in \Omega$.

Alors la fonction définie sur Ω par

$$F(z) = \int_I f(t, z) dt$$

est holomorphe dans Ω et sa dérivée est donnée par

$$F'(z) = \int_I \frac{\partial f}{\partial z}(t, z) dt.$$

Ce Théorème est du domaine de la théorie de la mesure que certains d'entre vous ont un peu abordé l'an dernier. Il se démontre à l'aide du Théorème de convergence dominée de Lebesgue, nous ne le ferons pas ici. Si le vocabulaire employé ci-dessus vous est complètement étranger, remplacez *mesurable* par *continue*, *pour presque tout* par *pour tout* et rappelez-vous que g intégrable sur I signifie simplement que $\int_I |g(t)| dt$ est finie.

Démonstration du Théorème 3.4 : Soit z_0 un point de Ω , K un compact entourant z_0 . Prouvons tout d'abord qu'on peut dériver sous le signe somme la formule de Cauchy. On va travailler sur la boule centrée en z_0 et de rayon r qu'on suppose incluse dans l'intérieur de K . Notons $\delta = d(z_0, \partial K) - r > 0$. Supposons paramétré le bord du compact K par $z = z(t)$, t parcourant un certain intervalle I . La formule de Cauchy fournit alors

$$f(z_0) = \frac{1}{2i\pi} \int_I \frac{f(z(t))z'(t) dt}{z(t) - z_0}.$$

Comme la fonction $z_0 \mapsto \frac{f(z(t))z'(t)}{z(t) - z_0}$ est une fonction holomorphe de z_0 et que

$$\left| \frac{f(z(t))z'(t)}{z(t) - z_0} \right| \leq \frac{|f(z(t))z'(t)|}{\delta} \quad (3.5)$$

(le second membre de (3.5) étant intégrable et indépendant de z_0) on peut bien appliquer le Théorème 3.5 qui fournit

$$f'(z_0) = \frac{1}{2i\pi} \int_I \frac{f(z(t))z'(t) dt}{(z(t) - z_0)^2}. \quad (3.6)$$

Pour prouver maintenant que f' est holomorphe, on repart de la formule (3.6) et on réapplique exactement de la même façon le Théorème 3.5 et ainsi de suite pour toutes les dérivées successives. \square

3.2.2 Analyticité

Théorème 3.6 *Soit f une fonction holomorphe sur un disque ouvert $\{z, |z - z_0| < r\}$, alors f est développable en série entière sur ce disque.*

En conséquence une fonction holomorphe sur un ouvert Ω est développable en série entière au voisinage de chaque point de Ω . On dit que f est analytique.

Nous avons vu lors du chapitre 1 qu'une fonction analytique est holomorphe, le Théorème précédent fournit une réciproque à cet énoncé.

Démonstration du Théorème : Elle est tout à fait similaire à celle du Théorème 2.9 sur le développement en série de Laurent. Prenons $z_0 = 0$ pour simplifier les écritures (mais ça ne change rien). Fixons deux réels r_0 et r_1 tels que $0 < r_0 < r_1 < r$ et écrivons la formule de Cauchy sur le disque de centre 0 et de rayon r_1 (dont le bord sera noté γ_1) :

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_1} \frac{f(\eta) d\eta}{\eta - z}. \quad \text{pour tout } z \text{ tel que } |z| < r_0.$$

Or $\frac{1}{\eta - z}$ peut s'écrire

$$\frac{1}{\eta - z} = \frac{1}{\eta} \frac{1}{1 - \frac{z}{\eta}} = \frac{1}{\eta} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\eta^n}$$

avec convergence normale de la série pour z tel que $|z| < r_0$. On peut donc intervertir l'intégrale et la série, ce qui fournit

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_1} \frac{1}{\eta} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\eta^n} f(\eta) d\eta = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

où a_n est donné par

$$a_n = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_1} \frac{f(\eta) d\eta}{\eta^{n+1}} = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \quad (3.7)$$

(la dernière égalité venant du Théorème 3.4 ce qui prouve le résultat. \square)

Puisque $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$, on voit que f est somme de sa série de Taylor. La démonstration précédente prouve également que le rayon de convergence de la série entière en un point z_0 est en fait le rayon du plus grand disque centré en z_0 contenu dans l'ouvert où la fonction est holomorphe. En particulier quand une fonction est holomorphe dans le plan complexe tout entier (on dit alors qu'elle est **entière**), la série entière en tout point a pour rayon de convergence $+\infty$.

3.2.3 Inégalités de Cauchy et conséquences

De l'expression de a_n donnée par la formule (3.7), on tire les inégalités suivantes appelées **Inégalités de Cauchy**

$$|a_n| \leq \frac{M(r)}{r^n} \quad \text{avec } M(r) = \sup\{|f(z)|, |z| = r\} \quad (3.8)$$

Dans la formule (3.8), on s'est placé à l'origine et r est un réel positif quelconque pourvu que f soit holomorphe sur un ouvert contenant le disque $D(0, r)$ et $M(r)$ représente donc le suprémum de $|f|$ sur le bord de ce disque. On va déduire de ces inégalités le Théorème suivant dû à Liouville qui met en lumière une fois de plus la différence qui existe entre la théorie des fonctions holomorphes dans \mathbb{C} et celle des fonctions dérivables dans \mathbb{R} .

Théorème 3.7 (Liouville) *Soit f une fonction entière (c'est-à-dire holomorphe dans le plan complexe tout entier) et bornée sur \mathbb{C} . Alors f est constante.*

Démonstration : On utilise les inégalités de Cauchy pour tout réel R puisque f est holomorphe dans \mathbb{C} . De plus, comme f est bornée, on a $M(R) \leq M$ où M est une constante :

$$\forall R > 0, |a_n| \leq \frac{M(R)}{R^n} \leq \frac{M}{R^n}.$$

En faisant tendre R vers l'infini, on en déduit $a_n = 0$ pour tout $n \geq 1$ ce qui prouve le résultat. \square

On déduit du Théorème de Liouville le célèbre Théorème de D'Alembert :

Théorème 3.8 (D'Alembert) *Tout polynôme de degré $n \geq 1$ possède une racine dans \mathbb{C} (et donc exactement n racines).*

Démonstration : On raisonne par contraposée. Supposons que le polynôme P n'ait aucune racine dans \mathbb{C} . La fonction $z \mapsto \frac{1}{P(z)}$ est alors holomorphe sur \mathbb{C} (car le dénominateur ne s'annule pas). Par ailleurs elle est bornée sur \mathbb{C} : dans le cas $n \geq 1$ on utilise le fait que c'est une fonction continue qui tend vers 0 quand $|z| \rightarrow +\infty$ (on sait bien que $|P(z)| \sim |a_n||z|^n$ à l'infini). Le Théorème de Liouville permet donc d'affirmer que $\frac{1}{P(z)}$ est constante, donc que P est un polynôme constant. \square

Revenons un instant sur la Proposition 2.10 que nous avons énoncée dans le chapitre 2 sans la démontrer. Il faut montrer que si une fonction holomorphe est bornée au voisinage d'une singularité z_0 , alors c'est en fait une fausse singularité. Les inégalités de Cauchy s'étendent immédiatement au cas des entiers n négatifs : $|a_n| \leq \frac{M(r)}{r^n}$ est vrai également quand $n < 0$. Supposons maintenant f bornée, donc $M(r) \leq M$ et faisons tendre r vers 0, on obtient bien que pour tout entier $n < 0$, a_n est nul ce qu'il fallait prouver. Noter la similitude de démonstration avec celle du Théorème de Liouville.

3.2.4 Principe du prolongement analytique

Pour une fonction, être analytique est une propriété plus forte qu'être simplement C^∞ comme on va le voir dans les deux propositions suivantes qui peuvent également s'énoncer pour les fonctions analytiques réelles (qui sont en fait les restrictions à \mathbb{R} de fonctions analytiques complexes, c'est-à-dire de fonctions holomorphes).

Théorème 3.9 *Soit f une fonction holomorphe dans un ouvert connexe Ω et z_0 un point de Ω . Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

- (i) $f^{(n)}(z_0) = 0$ pour tout $n \geq 0$
- (ii) f est identiquement nulle dans un voisinage de z_0
- (iii) f est identiquement nulle sur Ω

Démonstration :

(iii) \Rightarrow (i) est évident.

(i) \Rightarrow (ii) provient de l'analyticité et plus précisément du fait que f est égale à sa série de Taylor dans un voisinage de z_0 .

Il reste à prouver (ii) \Rightarrow (iii). Soit \mathcal{U} l'ensemble

$$\mathcal{U} = \{z \in \Omega; f \text{ est identiquement nulle dans un voisinage de } z\}.$$

Alors \mathcal{U} est ouvert par définition et est non vide par l'hypothèse (ii). Vérifions que \mathcal{U} est fermé : soit z_n une suite d'éléments de \mathcal{U} qui converge vers un point z . Pour tout entier $k \geq 0$ fixé, on a $0 = f^{(k)}(z_n) \rightarrow f^{(k)}(z)$, donc $f^{(k)}(z) = 0$ et on applique (i) \Rightarrow (ii) qui montre que $z \in \mathcal{U}$. L'ensemble \mathcal{U} étant à la fois ouvert, fermé et non vide dans le connexe Ω , il est égal à tout Ω . \square

Corollaire 3.10 (Principe du prolongement analytique) *Si deux fonctions holomorphes sur un ouvert connexe Ω coïncident au voisinage d'un point, elles sont égales sur Ω .*

En effet si deux fonctions coïncident au voisinage du point z_0 toutes leurs dérivées seront égales en ce point (car toutes les dérivées se calculent localement) et donc on obtient le résultat en appliquant le Théorème précédent à la différence des deux fonctions.

Remarque 3.2 Dans le Corollaire précédent on peut affaiblir l'hypothèse que f et g coïncident dans tout le voisinage d'un point. Pour aboutir à la même conclusion, on peut se contenter de supposer que f et g coïncident **sur un ensemble dénombrable de points possédant un point limite**. Cela va être une conséquence des propriétés des zéros des fonctions analytiques que nous allons voir maintenant.

3.2.5 Zéros des fonctions analytiques

Soit f une fonction holomorphe non nulle dans un ouvert connexe Ω et $z_0 \in \Omega$ un zéro (on dit aussi une racine) de f . On sait que f est développable en série entière au voisinage de z_0 :

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(z - z_0)^n, \quad \text{pour } |z - z_0| < \alpha.$$

Soit k le plus petit entier tel que $a_k \neq 0$, on a dans le disque $|z - z_0| < \alpha$

$$f(z) = (z - z_0)^k f_1(z) \quad \text{avec } f_1(z_0) \neq 0 \quad f_1 \text{ analytique.} \quad (3.9)$$

Définition 3.11 *L'entier k s'appelle l'ordre de multiplicité de z_0 , il est caractérisé par*

$$f^{(n)}(z_0) = 0 \quad \text{pour } 0 \leq n \leq k - 1 \quad \text{et } f^{(k)}(z_0) \neq 0.$$

Si $k = 1$, on dit que z_0 est un zéro simple, si $k \geq 2$ que c'est un zéro multiple.

Par ailleurs, la continuité de f_1 et le fait que $f_1(z_0) \neq 0$ entraînent que f_1 est non nulle dans un voisinage de z_0 . Autrement dit, en utilisant la relation (3.9), on voit qu'il existe un voisinage de z_0 tel que f ne s'annule pas sur ce voisinage en dehors de z_0 . On a donc montré :

Proposition 3.12 *Si f est holomorphe et non identiquement nulle sur un ouvert Ω connexe, les zéros de f sont isolés : ils forment donc un ensemble discret et sont en nombre fini sur toute partie compacte.*

Remarquons que cette propriété, qui est également vraie pour les fonctions analytiques réelles, ne l'est plus si on suppose seulement la fonction C^∞ comme le lecteur s'en convaincra en examinant l'exemple de la fonction $f(x) = \exp(-\frac{1}{x^2}) \sin(\frac{1}{x})$.

On comprend mieux maintenant la Remarque 3.2 ci-dessus : si deux fonctions f et g coïncident sur un ensemble ayant un point limite, leur différence $f - g$ s'annule une infinité de fois sur une boule et est donc identiquement nulle sur cette boule.

3.3 Applications de la formule des résidus

3.3.1 A la détermination du nombre de zéros et de pôles

Soit f une fonction méromorphe (i.e. quotient de deux fonctions holomorphes) sur un ouvert Ω et K un compact inclus dans Ω . Les zéros de f sont les zéros du numérateur de f tandis que les pôles de f sont les zéros de son dénominateur. D'après le paragraphe précédent, les zéros et les pôles sont tous deux en nombre fini dans K . Il est fréquent qu'on ait besoin de connaître ce nombre (par exemple pour initier une méthode numérique destinée à les calculer). La formule suivante s'avèrera alors fort utile.

Proposition 3.13 *Soit f une fonction méromorphe sur un ouvert Ω et K un compact régulier inclus dans Ω . On suppose que f n'a ni zéro, ni pôle sur le bord de K . Notons \mathcal{Z} le nombre de zéros de f à l'intérieur de K et \mathcal{P} le nombre de pôles (comptés avec leur ordre de multiplicité), alors*

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\partial K} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \mathcal{Z} - \mathcal{P}. \quad (3.10)$$

Démonstration : Soit z_0 un zéro ou un pôle de f . Dans chacun des cas, f admet un développement au voisinage de z_0 de la forme $f(z) = (z - z_0)^k f_1(z)$ (avec $k > 0$ s'il s'agit d'un zéro, $k < 0$ s'il s'agit d'un pôle), f_1 étant non nulle en z_0 . On a alors

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{k}{z - z_0} + \frac{f_1'(z)}{f_1(z)}$$

donc le résidu de $\frac{f'(z)}{f(z)}$ au point z_0 est exactement k ordre de multiplicité de z_0 (compté positivement s'il s'agit d'un zéro, négativement s'il s'agit d'un pôle). Comme les seules singularités du quotient $\frac{f'(z)}{f(z)}$ sont les pôles ou les zéros de f (f' a nécessairement les mêmes pôles que f car si une fonction est holomorphe sa dérivée l'est également : il n'y a pas création de singularité), la proposition résulte du Théorème des résidus. \square

Une autre application de la formule précédente consiste à déterminer le nombre de solutions d'une équation $f(z) = a$ sur un compact quand f est holomorphe. En appliquant la formule (3.10) à la fonction holomorphe $f(z) - a$ on obtient

$$\text{Nombre de solutions de l'équation } f(z) = a \text{ dans } K : \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial K} \frac{f'(z)}{f(z) - a} dz \quad (3.11)$$

3.3.2 Le Théorème de Rouché

Le Théorème suivant a de nombreuses applications, nous en verrons quelques unes en T.D.

Théorème 3.14 (Rouché) *Soit f une fonction holomorphe sur un ouvert Ω et K un compact régulier inclus dans Ω . On suppose que f se décompose sous la forme $f = f_1 + f_2$ (avec f_1 et f_2 holomorphes) et que $|f_1(z)| > |f_2(z)|$ sur le bord de K . Alors f admet dans l'intérieur de K autant de zéros que f_1 (comptés avec leur ordre de multiplicité).*

Démonstration : Introduisons la fonction du paramètre t définie par

$$t \in [0, 1] \mapsto \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial K} \frac{f_1'(z) + t f_2'(z)}{f_1(z) + t f_2(z)} dz.$$

Puisque $|f_1| > |f_2|$ sur ∂K , le dénominateur $f_1(z) + t f_2(z)$ ne s'annule pas et il est immédiat que la fonction définie par l'intégrale ci-dessus est une fonction continue de t . Or elle ne prend que des valeurs entières puisque d'après la formule (3.10) cette intégrale représente exactement le nombre de zéros de la fonction $z \mapsto f_1(z) + t f_2(z)$. Une fonction continue qui ne prend que des valeurs entières étant constante, elle prend les mêmes valeurs pour $t = 0$ et $t = 1$ ce qui fournit le résultat. \square

Remarquons que le Théorème de Rouché permet de retrouver le fait que tout polynôme de degré n a exactement n zéros dans \mathbb{C} et plus précisément il donne une boule dans laquelle chercher ces zéros. En effet, soit $P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$ un polynôme avec $a_n \neq 0$. Choisissons pour fonction $f_1(z) = a_n z^n$ et $f_2(z) = P(z) - f_1(z)$. Par un simple argument de passage à la limite quand $R \rightarrow +\infty$, on voit qu'il existe un réel R_0 tel que pour $R \geq R_0$ on ait

$$\frac{|a_{n-1}|}{R} + \frac{|a_{n-2}|}{R^2} + \dots + \frac{|a_1|}{R^{n-1}} + \frac{|a_0|}{R^n} < |a_n|.$$

On en déduit que pour tout $R \geq R_0$, sur le cercle de rayon R on a

$$|f_1(z)| = |a_n| |z|^n = a_n R^n > |f_2(z)| = |a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0|.$$

Le Théorème de Rouché montre ainsi que P a autant de zéros que f_1 , c'est-à-dire n dans le disque de centre 0 et de rayon R_0 .

3.4 Exercices du chapitre 3

Exercice 1 : Soit f holomorphe et injective dans un ouvert Ω contenant le disque fermé $D(0, R)$ et γ l'image du cercle $C(0, R)$ par f . Montrer que la longueur L de γ est donnée par

$$L = R \int_0^{2\pi} |f'(Re^{i\theta})| d\theta \quad \text{et que} \quad L \geq 2\pi R |f'(0)|.$$

Montrer de même que l'aire A de l'image du disque $D(0, R)$ est donnée par

$$A = \iint_{D(0,R)} |f'(x+iy)|^2 dx dy \quad \text{et que} \quad A \geq \pi R^2 |f'(0)|^2.$$

Quels sont les cas d'égalité dans les inégalités ci-dessus ?

Exercice 2 : Soit ABC un triangle du plan, déterminer le(s) point(s) du triangle où la fonction $f(M) = MA \cdot MB \cdot MC$ atteint son maximum (faire le calcul exact dans le cas d'un triangle rectangle isocèle).

Exercice 3 : Soit f holomorphe, non constante, sur un ouvert connexe Ω contenant un disque fermé D . Si $|f|$ est constante sur le bord de D , montrer que f a au moins un zéro dans D .

Exercice 4 : Soit f une fonction entière (c'est-à-dire holomorphe dans le plan complexe tout entier) telle qu'il existe un entier n et deux réels positifs R et M tels que $|f(z)| \leq M|z|^n$ pour tout $|z| \geq R$. Montrer que f est un polynôme.

Exercice 5 : On suppose que f et g sont des fonctions entières telles que $\forall z \in \mathbb{C} \quad |f(z)| \leq |g(z)|$. Que peut-on en déduire ?

Exercice 6 : Déterminer toutes les fonctions holomorphes dans un voisinage de 0 et vérifiant l'une des relations ci-dessous (pour tout entier naturel n) :

$$\begin{aligned} \text{a) } f\left(\frac{1}{n}\right) &= \frac{1}{2n+1}. \\ \text{b) } f\left(\frac{1}{n}\right) &= f\left(-\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2n+1}. \end{aligned}$$

Exercice 7 : Soit $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ une fonction entière qui vérifie :

$$\exists M \in \mathbb{R}_+^* \quad |f(z)| \leq M e^{|z|}.$$

Montrer que pour tout n , $|a_n| \leq M \left(\frac{n}{e}\right)^{-n}$. Etudier la réciproque.

Exercice 8 : Soit f une fonction holomorphe sur un ouvert borné Ω , continue sur $\overline{\Omega}$, f ne s'annulant pas dans Ω . Montrer que $|f|$ atteint son minimum sur le bord de Ω .

Exercice 9 : Soit f et g deux fonctions holomorphes sur un ouvert contenant le disque unité fermé D et qui ne s'annulent pas sur le disque unité ouvert. On suppose que $f(0)$ et $g(0)$ sont réels positifs. Montrer que si $f(z)$ et $g(z)$ ont même module sur le cercle unité, alors $f(z) = g(z)$ dans D .

Exercice 10 : Montrer que l'équation $(z - 1)^p e^z = a$ où p est un entier, $p > 1$ et a un nombre complexe de module strictement inférieur à 1, admet exactement p zéros dans le demi-plan $\Re(z) > 0$.

Exercice 11 : Soit f holomorphe sur un ouvert contenant le disque unité fermé et telle que $|f(z)| > 2$ pour $|z| = 1$ et $f(0) = 1$. f admet-elle un zéro dans le disque unité ?

Exercice 12 : Soit Ω un ouvert connexe de \mathbb{C} et K un compact régulier inclus dans Ω . Soit f_n une suite de fonctions holomorphes sur Ω qui converge uniformément sur tout compact vers une fonction f holomorphe non identiquement nulle. On suppose que f ne s'annule pas sur ∂K . Montrer que, pour n assez grand, f_n et f ont le même nombre de zéros dans K .

En déduire que si a est un zéro de f , il existe une suite a_n de Ω telle que $a_n \rightarrow a$ et $f_n(a_n) = 0$.

Chapitre 4

Représentation conforme

4.1 Introduction

On a vu lors du chapitre 1, Remarque 1.1, qu'une fonction holomorphe avait la propriété de "conserver les angles". Plus précisément, soit Φ une fonction holomorphe en z_0 telle que $\Phi'(z_0) \neq 0$ (de sorte que la différentielle de Φ en z_0 est une similitude directe), et soit γ_1 et γ_2 deux courbes régulières se croisant en z_0 . Alors, si les tangentes à γ_1 et γ_2 font un certain angle θ , les tangentes aux courbes images $\Phi(\gamma_1)$ et $\Phi(\gamma_2)$ feront le même angle θ . C'est bien sûr dû au fait que l'angle des deux tangentes est transformé par l'application linéaire tangente, c'est-à-dire la différentielle, et que celle-ci conserve les angles puisque c'est une similitude directe de rapport $|\Phi'(z_0)|$ et d'angle $\arg(\Phi'(z_0))$. Une application qui a cette propriété s'appelle une **transformation conforme**. Dans ce chapitre, une transformation conforme désignera une fonction holomorphe bijective (d'un ouvert du plan complexe dans un autre).

Les deux problèmes de la représentation conforme sont les suivants :

Problème direct Etant donnée Φ holomorphe sur un ouvert Ω du plan,

- Φ est-elle injective sur Ω ?
- Quelle est l'image de Ω par Φ ?

On dit alors que Φ représente conformément Ω sur $\Phi(\Omega)$.

Exemple : soit $\Phi(z) = \frac{z-i}{z+i}$ définie sur $P = \{z \in \mathbb{C}, \Im m(z) > 0\}$. Alors,

- Φ est injective sur P : l'unique antécédent de $Z = \frac{z-i}{z+i}$ est $z = i \frac{Z+1}{1-Z}$
- L'image de P par Φ est le disque unité \mathbb{D} car

$$z \in P \Leftrightarrow \Im m\left(i \frac{Z+1}{1-Z}\right) > 0 \Leftrightarrow \Re e\left(\frac{(Z+1)(1-\bar{Z})}{(1-Z)(1-\bar{Z})}\right) > 0$$

$$\Leftrightarrow \Re e(1+Z-\bar{Z}-Z\bar{Z}) > 0 \Leftrightarrow |Z| < 1$$

Remarque 4.1 L'image de la droite réelle par Φ est le cercle unité, c'est-à-dire que Φ transforme le bord du domaine P en le bord du domaine $\Phi(P)$. C'est d'ailleurs une propriété générale. Nous verrons ci-dessous comment utiliser ce genre de renseignements.

On appelle transformation homographique une application du type $z \rightarrow \frac{az + b}{cz + d}$ (avec $ad - bc \neq 0$). On montre aisément en décomposant celle-ci en produit de translation, rotation, homothétie et inversion que ce sont des applications qui transforment les droites et cercles en droites et cercles et donc les demi-plans en demi-plans, en disques ou en extérieurs de disques.

Problème inverse

Etant donné Ω_1 et Ω_2 deux ouverts du plan complexe,

- Existe-t-il Φ transformation conforme qui envoie Ω_1 sur Ω_2 (on dit que Ω_1 et Ω_2 sont conformément équivalents) ?
- Si oui, peut-on la déterminer ?

Remarque 4.2 Bien sûr, il faut déjà que Ω_1 et Ω_2 soient homéomorphes¹ ! Mais cela n'est pas suffisant. Par exemple, le plan complexe \mathbb{C} et le disque unité (ouvert) \mathbb{D} sont homéomorphes (par exemple par $z = re^{i\theta} \mapsto \frac{2}{\pi} \arctan(r)e^{i\theta}$), mais ils ne sont pas conformément équivalents. En effet, s'il existait une transformation conforme Φ de \mathbb{C} sur \mathbb{D} , elle serait bornée sur \mathbb{C} et donc, d'après le Théorème de Liouville, Φ serait constante, ce qui est absurde. On verra néanmoins un peu plus loin, qu'à part cet exemple générique, deux ouverts simplement connexes du plan sont toujours conformément équivalents.

La question de la détermination pratique de la transformation conforme, pour deux ouverts Ω_1 et Ω_2 conformément équivalents, est une question très difficile. Bien sûr, on peut toujours se ramener par composée et passage à l'inverse au cas où l'un des deux ouverts est le disque unité, mais même là le problème reste compliqué. Nous envisagerons plus loin le cas des polygones, pour le reste il faudra faire appel à des catalogues ou procéder par approximation.

4.2 Le problème direct

Le premier problème qui se pose est celui de l'injectivité de l'application holomorphe qu'on considère (on emploie aussi le terme f est *univalente*). On peut parfois déterminer "à la main" si une application est injective, par exemple quand elle est polynomiale (cf Exercices), mais dans la plupart des cas, c'est une question difficile. Citons tout d'abord une condition nécessaire d'injectivité qui permet déjà d'éliminer d'éventuels candidats.

Proposition 4.1 *Une condition nécessaire pour qu'une fonction holomorphe f soit injective sur un ouvert Ω est que f' ne s'annule pas sur Ω .*

Remarquons là encore la différence avec le cas des fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{R} où le résultat précédent est faux (prendre, par exemple $f(x) = x^3$).

Démonstration : Supposons que la dérivée de la fonction f s'annule en un point z_0 de l'ouvert Ω . Sans restreindre la généralité (on peut s'y ramener par une double translation), on peut toujours supposer $z_0 = 0$ et $f(z_0) = 0$. Dans ce qui suit, il est essentiel de supposer que f n'est pas identiquement nulle dans un voisinage de 0 (sinon le résultat est évident).

1. voir Annexe

Notons p , $p \geq 2$ l'ordre de multiplicité du zéro de f à l'origine. Le développement de Taylor de f en 0 s'écrit alors (n'oublions pas que f est analytique) :

$$w = f(z) = \alpha(z^p + z^p f_1(z)) \quad (4.1)$$

avec α non nul et f_1 holomorphe à l'origine, $f_1(0) = 0$. On choisit alors la détermination principale du logarithme et on introduit la fonction

$$f_2(z) = \alpha^{1/p}(1 + f_1)^{1/p}.$$

La fonction f_2 ainsi construite est holomorphe dans un voisinage de l'origine (car $1 + f_1$ vaut 1 à l'origine) et $f_2(0) \neq 0$. La relation (4.1) s'écrit alors

$$w = (zf_2(z))^p. \quad (4.2)$$

Posons $zf_2(z) = t$. La fonction $zf_2(z)$ est holomorphe et a une dérivée non nulle à l'origine. Le théorème d'inversion locale implique donc l'existence d'une fonction g , définie dans un voisinage de 0, et telle que $z = g(t)$. De plus $g(0) = 0$ et $g'(0) \neq 0$. Maintenant d'après (4.2), on a $t = w^{1/p}$ d'où finalement :

$$z = g(w^{1/p}). \quad (4.3)$$

En particulier, à toute valeur w assez voisine de 0 et non nulle, correspondent p valeurs distinctes de z . Ce qui prouve la non-injectivité de f au voisinage de l'origine. \square

Malheureusement la condition $f'(z) \neq 0$ n'est pas suffisante pour assurer l'injectivité comme le prouve le cas de e^z ou de z^2 sur tout ouvert symétrique par rapport à l'origine mais ne contenant pas 0. Donnons à présent un résultat théorique, mais qui peut aussi être utilisé pratiquement, par exemple en évaluant numériquement l'intégrale qui définit l'indice. Ce résultat peut permettre à la fois de prouver qu'une application f est injective et de déterminer son image. Nous aurons besoin pour cela de la notion d'indice d'un point par rapport à une courbe.

Définition 4.2 Soit γ une courbe régulière du plan complexe et a un point n'appartenant pas à γ . On appelle **indice de a par rapport à γ** et on note $I(a, \gamma)$ le nombre entier

$$I(a, \gamma) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{dz}{z - a}.$$

L'indice mesure en fait le *nombre de tours* que fait γ autour du point a . Ainsi, si γ est le bord d'un compact K , la formule des résidus indique que l'indice vaut 1 si $a \in K$ et 0 si $a \notin K$.

Proposition 4.3 Soit Ω un ouvert simplement connexe borné, et γ son bord. Soit f une fonction holomorphe dans un ouvert contenant strictement Ω , notons Γ le lacet $f(\gamma)$.

Une condition nécessaire et suffisante pour que f soit injective dans Ω est que $I(w, \Gamma)$ (l'indice de w par rapport à Γ) ne prenne que les valeurs 0 ou 1, pour tout w n'appartenant pas à Γ .

De plus, l'image de Ω par f coïncide avec $f(\Omega) = \{w \in \mathbb{C}, I(w, \Gamma) = 1\}$.

Démonstration : Par définition de l'indice, on a

$$I(w, \Gamma) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma} \frac{dZ}{Z - w}.$$

Soit, en posant $Z = f(z)$

$$I(w, \Gamma) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{f'(z)dz}{f(z) - w}$$

ce qui représente exactement le nombre de solutions dans Ω de l'équation $f(z) = w$. En particulier, ce nombre vaut soit 0, soit 1 si f est injective et réciproquement. De plus, il vaut 1 quand w est dans l'image de Ω , ce qui achève la démonstration. \square

Remarque 4.3 Une conséquence pratique de la proposition ci-dessus : si Γ est une courbe fermée simple (c'est-à-dire que f est injective sur γ), alors nécessairement f est injective dans Ω et l'image de Ω est l'une des deux composantes de \mathbb{C} privé de Γ .

Revenons au problème de déterminer l'image d'un ouvert par une fonction holomorphe. Comme suggéré ci-dessus, il suffira bien souvent de chercher l'image du bord comme l'illustre le Théorème suivant.

Théorème 4.4 Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{C} et f une fonction holomorphe, injective sur Ω et continue sur $\bar{\Omega}$. Alors, l'image du bord coïncide avec le bord de l'image :

$$f(\partial\Omega) = \partial(f(\Omega)) .$$

Démonstration : (le lecteur non familier avec les notions de bord, d'adhérence ... se reportera avec profit à l'annexe) Notons γ le bord de Ω et Γ le bord de $f(\Omega)$. Nous allons montrer deux inclusions.

1. $f(\gamma) \subset \Gamma$: soit $Z \in f(\gamma)$, donc il existe $z \in \gamma$ tel que $Z = f(z)$. Tout d'abord, comme $z \in \gamma$, il est limite d'une suite de points z_n de Ω et comme f est continue, on a $Z = \lim f(z_n)$ ce qui montre que $Z \in \overline{f(\Omega)}$. Pour montrer que Z est dans $\Gamma = \partial f(\Omega)$, il faut donc montrer que Z n'appartient pas à $f(\Omega)$. On raisonne par l'absurde : supposons qu'il existe $z_0 \in \Omega$ tel que $f(z_0) = f(z) = Z$. Comme $f'(z_0) \neq 0$ (par la proposition 4.1), grâce au théorème d'inversion locale, f définit un difféomorphisme d'un voisinage \mathcal{V} de z_0 sur un voisinage \mathcal{V}' de Z . Or on sait que $Z = \lim f(z_n)$ avec des points z_n de Ω qui tendent vers z (voir ci-dessus) et donc qu'on peut supposer hors de \mathcal{V} . On aura d'une part $f(z_n) \in \mathcal{V}'$ pour n assez grand et d'autre part $z_n \notin \mathcal{V}$ ce qui est contradictoire avec l'hypothèse d'injectivité de f .

2. $\Gamma \subset f(\gamma)$: Soit $Z \in \Gamma$ et Z_n une suite de points de $f(\Omega)$ qui converge vers Z . On a donc une suite d'antécédents z_n tels que $f(z_n) = Z_n$. Comme Ω est borné, $\bar{\Omega}$ est compact et donc on peut extraire de la suite z_n une sous-suite z_{n_k} qui converge vers un point $z \in \bar{\Omega}$. Par continuité de f , $f(z_{n_k})$ converge vers $f(z)$ et donc $Z = f(z)$. Maintenant, il n'est pas possible que z soit dans Ω (sinon, on aurait $Z \in f(\Omega)$ ce qui contredirait le fait que Z est sur la frontière de $f(\Omega)$), donc c'est que $z \in \gamma$ et $Z \in f(\gamma)$. \square

2. attention f injective sur Ω n'entraîne pas que f est injective sur $\bar{\Omega}$ comme on s'en convaincra aisément et donc on ne peut pas conclure tout de suite

Remarque 4.4 La première partie de la preuve ci-dessus n'utilise pas l'hypothèse Ω borné. On en déduit que l'inclusion $f(\partial\Omega) \subset \partial(f(\Omega))$ est **toujours** vraie. En revanche, l'inclusion inverse n'est pas toujours vraie comme le montre l'exemple donné dans l'introduction de ce chapitre où l'image du bord du demi-plan, c'est-à-dire l'image de la droite réelle est le cercle unité privé du point $\{1\}$ et non le cercle en entier. Plus généralement, si la fonction f possède une limite l quand $z \rightarrow \infty$ (dans \mathbb{C}), alors on peut montrer que Γ (le bord de l'image) coïncide avec $f(\gamma) \cup \{l\}$, c'est-à-dire que c'est l'image du bord union l'image du "point" à l'infini.

Terminons par un résultat qui concerne la bijection réciproque.

Proposition 4.5 *Si f est une fonction holomorphe et injective dans un ouvert connexe Ω , alors f est un homéomorphisme de Ω sur $f(\Omega)$ et l'application réciproque f^{-1} est holomorphe dans $f(\Omega)$.*

Démonstration : Il faut tout d'abord montrer que f^{-1} est continue, c'est-à-dire que l'image réciproque de tout ouvert par f^{-1} est un ouvert, ou, ce qui revient au même, que l'image de tout ouvert par f est un ouvert. Or puisque f' ne peut s'annuler, en vertu de la Proposition 4.1, f définit un homéomorphisme d'un voisinage de tout point z_0 vers un voisinage du point $f(z_0)$ (par application du Théorème d'inversion locale). D'où la continuité de f^{-1} . De plus, la différentielle de f^{-1} en un point w_0 est l'inverse de la différentielle de f au point $z_0 = f^{-1}(w_0)$ qui est une similitude (inversible puisque son déterminant n'est autre que $|f'(z_0)|^2$). C'est donc également une similitude et f^{-1} est holomorphe en vertu des conditions de Cauchy. \square

4.3 Le problème inverse

Énonçons le principal résultat, dû à Riemann, et qui résout le problème théorique (c'est-à-dire la question de l'existence) pour les ouverts simplement connexes.

Théorème 4.6 (Riemann) *Tout ouvert simplement connexe du plan, autre que le plan lui-même, est conformément équivalent au disque unité ouvert.*

Nous admettrons ce résultat, pour la démonstration duquel nous renvoyons à la littérature, par exemple Cartan, Théorie élémentaire des fonctions analytiques d'une ou plusieurs variables.

Il existe également des versions de ce Théorème pour des ouverts non simplement connexes, mais ils sont plus compliqués à énoncer. Par exemple, si Ω est un ouvert "doublement connexe" (i.e. qui est homéomorphe à une couronne), il est conformément équivalent à une couronne du type $\mathcal{C}_R = \{z \in \mathbb{C}, R < |z| < 1\}$, mais R n'est pas connu *a priori*.

Le Théorème de Riemann donne donc l'existence **d'une** application holomorphe qui transforme conformément le disque unité \mathbb{D} en l'ouvert simplement connexe Ω , mais on peut se poser la question de les déterminer toutes. Si f_1 et f_2 sont deux bijections holomorphes de \mathbb{D} dans Ω , il est clair que $f_2^{-1} \circ f_1$ réalise une bijection holomorphe de \mathbb{D} dans lui-même. La question revient donc à déterminer toutes les bijections holomorphes du disque unité.

Proposition 4.7 *Les bijections holomorphes du disque unité \mathbb{D} dans lui-même sont les transformations homographiques définies par*

$$z \mapsto e^{i\theta} \frac{z + z_0}{1 + \bar{z}_0 z} \quad \text{où } \theta \in \mathbb{R}, z_0 \in \mathbb{D}.$$

On les appelle automorphismes du disque unité.

Le cas où $z_0 = 0$ correspond à une rotation d'angle θ . S'il est facile de prouver qu'une transformation du type ci-dessus est un automorphisme du disque unité, il est moins évident de prouver qu'on a bien là tous les automorphismes possibles. Là aussi, nous admettrons ce résultat et nous renvoyons le lecteur intéressé à la littérature.

On déduit de la Proposition précédente que si ϕ est un automorphisme du disque unité tel que $\phi(0) = e^{i\theta} z_0$ et $\arg(\phi'(0)) = \theta$ sont fixés, alors ϕ est déterminé de façon unique par l'expression ci-dessus. Plus généralement, il en résulte que si Ω est un ouvert simplement connexe, il existe une unique bijection conforme f qui envoie \mathbb{D} sur Ω et telle que $f(0)$ et $\arg(f'(0))$ soient fixés.

4.4 La transformation de Schwarz-Christoffel

Dans ce paragraphe, nous recherchons l'expression d'une transformation qui a pour image un polygone quelconque. Comme tout ouvert simplement connexe du plan peut être approché par un polygone, on conçoit que cet exemple soit particulièrement fondamental. Nous allons travailler ici avec le demi-plan supérieur P , c'est-à-dire que nous recherchons l'expression de la transformation conforme qui envoie P sur un polygone donné Ω . Pour se ramener au disque unité, il suffit ensuite de composer avec la fonction homographique $z \mapsto \frac{z-i}{z+i}$ ou son inverse.

Commençons par un exemple fondamental. Soit α, β, γ , trois réels positifs avec

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 2 \\ \alpha < 1 \\ \beta < 1 \\ \gamma < 1 \end{cases}$$

et Φ la fonction définie par

$$\Phi(z) = \int_{-1}^z \frac{du}{u^\alpha (u-1)^\beta (u-2)^\gamma}.$$

En choisissant la détermination du logarithme complexe correspondant à la coupure du plan par la demi-droite des imaginaires négatifs (avec un argument compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{3\pi}{2}$), la fonction $u \mapsto \frac{1}{u^\alpha (u-1)^\beta (u-2)^\gamma}$ est holomorphe sur le domaine Ω ci-dessous. Il en est donc de même de Φ . On veut maintenant déterminer l'image de la droite réelle par l'application Φ . Remarquons que l'intégrale qui définit $\Phi(x)$ pour x réel est convergente en les singularités 0, 1 et 2 du fait du choix de α, β, γ . De même l'intégrale est convergente quand $x \rightarrow \pm\infty$ puisque la fonction sous l'intégrale est alors équivalente, en valeur

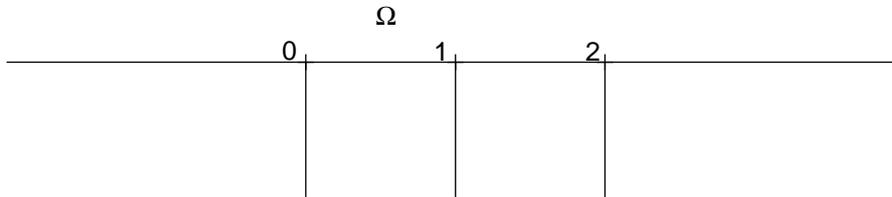


FIGURE 4.1 – Le domaine d'holomorphic

absolue, à u^{-2} . Plus précisément, nous allons montrer grâce à la formule de Cauchy que $\Phi(+\infty) := \lim_{x \rightarrow +\infty} \Phi(x)$ et $\Phi(-\infty) := \lim_{x \rightarrow -\infty} \Phi(x)$ sont égales.

Considérons en effet le contour Γ formé du segment $[-R, +R]$ coupé par de petits demi-cercles de rayon ε pour éviter les singularités en 0, 1 et 2 d'une part et du demi-cercle supérieur de diamètre $[-R, +R]$. La fonction à intégrer étant holomorphe à l'intérieur de

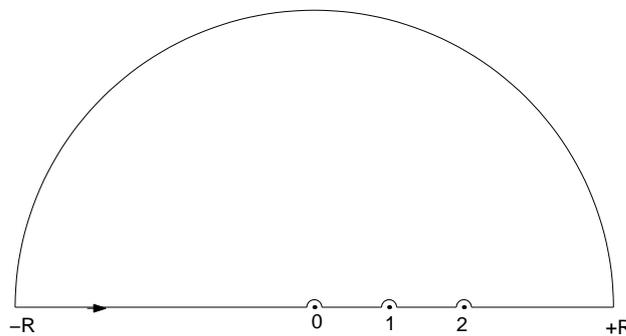


FIGURE 4.2 – Contour d'intégration

ce contour, on a $\int_{\Gamma} f(z) dz = 0$. On montre de plus sans aucune difficulté que les intégrales sur les petits cercles tendent vers 0 quand ε tend vers 0 de même que l'intégrale sur le grand demi-cercle quand R tend vers l'infini. Il en résulte que $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{du}{u^{\alpha}(u-1)^{\beta}(u-2)^{\gamma}} = 0$ c'est-à-dire

$$\int_{-1}^{+\infty} \frac{du}{u^{\alpha}(u-1)^{\beta}(u-2)^{\gamma}} - \int_{-1}^{-\infty} \frac{du}{u^{\alpha}(u-1)^{\beta}(u-2)^{\gamma}} = 0$$

ce qui prouve le résultat.

Nous allons rencontrer dans la suite quelques intégrales réelles convergentes que nous

noterons :

$$a = \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha(t+1)^\beta(t+2)^\gamma}, \quad b = \int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha(t+1)^\beta(t+2)^\gamma}, \quad c = \int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha(1-t)^\beta(2-t)^\gamma},$$

$$d = \int_1^2 \frac{dt}{t^\alpha(t-1)^\beta(2-t)^\gamma}, \quad e = \int_2^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha(t-1)^\beta(t-2)^\gamma}.$$

Cherchons tout d'abord l'image de la demi-droite $]-\infty, 0]$ par Φ . Quand $z = -x$ est un réel négatif, posons $u = -t$, avec t positif variant entre 1 et x . $\Phi(z)$ devient, compte-tenu de la détermination du log choisie

$$\Phi(z) = \Phi(-x) = - \int_1^x \frac{e^{-i\pi(\alpha+\beta+\gamma)} dt}{t^\alpha(t+1)^\beta(t+2)^\gamma}$$

Or, $e^{-i\pi(\alpha+\beta+\gamma)} = 1$ compte-tenu de $\alpha + \beta + \gamma = 2$. Donc $\Phi(z)$ est réel et quand z parcourt la demi-droite $]-\infty, 0]$, $\Phi(z)$ parcourt le segment $]\Phi(-\infty), \Phi(0)] =]a, b]$.

Cherchons maintenant l'image du segment $[0, 1]$. Quand $z \in [0, 1]$, on découpe l'intégrale de -1 à z en la somme de l'intégrale de -1 à 0 (qui vaut b) et l'intégrale de 0 à z qui est donnée par

$$\int_0^z \frac{e^{-i\pi(\beta+\gamma)} dt}{t^\alpha(1-t)^\beta(2-t)^\gamma} = e^{i\pi\alpha} \int_0^z \frac{dt}{t^\alpha(1-t)^\beta(2-t)^\gamma}$$

car $\pi(\beta + \gamma) = \pi(2 - \alpha)$. Quand z varie entre 0 et 1, l'intégrale ci-dessus varie entre 0 et c . Il en résulte que l'image du segment $[0, 1]$ par Φ est le segment du plan complexe d'extrémités $b = \Phi(0)$ et $b + e^{i\pi\alpha}c = \Phi(1)$ qui fait un angle $\pi\alpha$ avec l'axe horizontal.

De même, on montre que l'image du segment $[1, 2]$ par Φ est le segment du plan complexe d'extrémités $b + e^{i\pi\alpha}c = \Phi(1)$ et $b + e^{i\pi\alpha}c + e^{i\pi(\alpha+\beta)}d = \Phi(2)$ qui fait un angle $\pi\beta$ avec le segment précédent. Or, puisque

$$\Phi(+\infty) - \Phi(2) = \int_2^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha(t-1)^\beta(t-2)^\gamma}$$

qui est réel, il en résulte que $\Phi(2)$ est lui-même réel.

En conclusion, on déduit des calculs ci-dessus que l'image de la droite réelle n'est autre que le bord du triangle de sommets $\Phi(0)$, $\Phi(1)$, $\Phi(2)$ et que le demi-plan supérieur se transforme par Φ en l'intérieur du triangle (choisir un point particulier). Plus généralement, si $a_1 < a_2 < \dots < a_n$ sont des réels et $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ des réels positifs, inférieurs à 1 tels que $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = 2$, alors

$$\Phi(z) = \int_0^z \frac{dt}{\prod_{i=1}^n (t - a_i)^{\alpha_i}}$$

est une représentation conforme du demi-plan supérieur sur l'intérieur d'un polygone à n côtés.

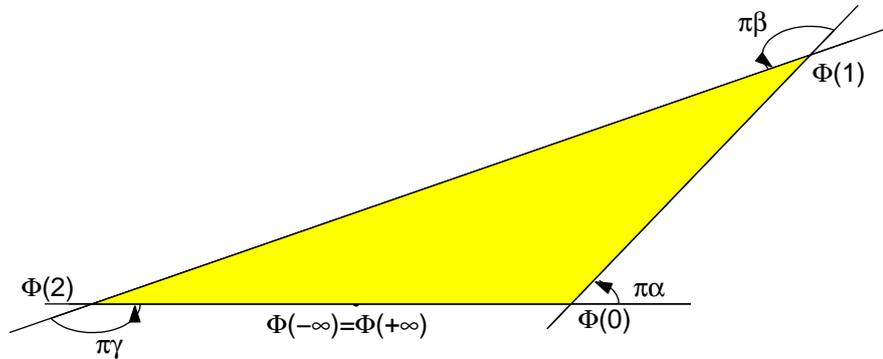


FIGURE 4.3 – Triangle image

4.5 Application au problème de Poisson

Comme vous le verrez dans d'autres cours, de nombreux problèmes de physique ou d'autres disciplines conduisent à considérer l'équation aux dérivées partielles suivante appelée **Problème de Poisson** :

$$(\mathcal{P}_{\Omega, u_0}) \quad \begin{cases} \Delta u = 0 & \text{dans } \Omega \\ u = u_0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

où Ω est un ouvert de \mathbb{R}^2 ou \mathbb{R}^3 , $\partial\Omega$ son bord et u_0 une fonction donnée (par exemple continue) sur $\partial\Omega$. La résolution exacte du problème $(\mathcal{P}_{\Omega, u_0})$ n'est possible en général que pour des géométries très particulières, essentiellement le cas où Ω est un disque ou rectangle en dimension 2 (une boule ou un parallélépipède en dimension 3). Faisons-le, par exemple, dans le cas où Ω est le disque unité de \mathbb{R}^2 . Nous allons travailler en coordonnées polaires (r, θ) . Pour n entier naturel, les fonctions $r^n \cos(n\theta)$ et $r^n \sin(n\theta)$ sont harmoniques puisqu'elles sont respectivement la partie réelle et la partie imaginaire de la fonction holomorphe z^n . Il en est de même de leurs combinaisons linéaires finies ou infinies pourvu que, dans ce cas, la série de fonctions converge normalement ainsi que ses premières dérivées. Ainsi, toute fonction du type

$$u(r, \theta) = c + \sum_{n=1}^{\infty} a_n r^n \cos(n\theta) + b_n r^n \sin(n\theta) \quad (4.4)$$

est harmonique sur le disque unité \mathbb{D} sous réserve de convergence normale de la série ainsi que ses premières dérivées. Supposons maintenant qu'on ait écrit le développement en série de Fourier de la fonction u_0 sur le cercle unité et que celui-ci soit de la forme

$$u_0(\theta) = a_0/2 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\theta) + b_n \sin(n\theta). \quad (4.5)$$

Alors, il est clair que la fonction définie par (4.4) est solution de $(\mathcal{P}_{\Omega, u_0})$ (prendre $c = a_0/2$ et faire $r = 1$ pour la condition au bord).

On va obtenir une autre expression de la solution u en explicitant les coefficients de Fourier. A partir des relations

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} u_0(t) \cos(nt) dt \quad \text{et} \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} u_0(t) \sin(nt) dt$$

on obtient (ici, on fait un calcul formel donc on se permet de ne pas justifier l'interversion de série et d'intégrale) :

$$\begin{aligned} u(r, \theta) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u_0(t) dt + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{2\pi} u_0(t) (\cos(nt) \cos(n\theta) + \sin(nt) \sin(n\theta)) r^n dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} u_0(t) \left(\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \cos(n(\theta - t)) r^n \right) dt. \end{aligned}$$

Soit, en utilisant la relation suivante (qu'on obtient aisément en passant en complexe) :

$$\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \cos(nu) r^n = \frac{1 - r^2}{2(1 + r^2 - 2r \cos u)}$$

on obtient une autre expression de u solution de $(\mathcal{P}_{\Omega, u_0})$:

$$u(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u_0(t) \frac{1 - r^2}{1 + r^2 - 2r \cos(t - \theta)} dt.$$

La fonction $P_r(t) = \frac{1 - r^2}{1 + r^2 - 2r \cos t}$ s'appelle le noyau de Poisson.

Remarquons que u , fonction harmonique, est la partie réelle de la fonction holomorphe

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathcal{C}} \frac{u_0(\xi)}{\xi} \frac{\xi + z}{\xi - z} d\xi$$

où \mathcal{C} désigne le cercle unité et où on écrit indifféremment $u_0(\theta)$ ou $u_0(e^{i\theta})$ pour désigner l'image du point $e^{i\theta}$ par la fonction u_0 .

On va voir maintenant que l'utilisation des transformations conformes permet (au moins en théorie) de donner une solution explicite de la solution u du problème $(\mathcal{P}_{\Omega, u_0})$, **pour tout ouvert Ω simplement connexe** de bord Γ . Soit Φ une représentation conforme du disque unité \mathbb{D} sur Ω (qui existe toujours en vertu du Théorème de Riemann car Ω ayant un bord, il ne peut être égal au plan tout entier). De plus, Φ transforme \mathcal{C} en Γ . Notons F la fonction holomorphe dont u est la partie réelle et introduisons les fonctions "transportées" par Φ sur le disque unité :

$$\widehat{F} = F \circ \Phi \quad \widehat{u} = u \circ \Phi = \Re e(\widehat{F}).$$

Il est clair que \widehat{u} , définie sur le disque unité, est la solution du problème $(\mathcal{P}_{\mathbb{D}, u_0 \circ \Phi})$ car elle est harmonique et, pour $\xi \in \mathcal{C}$ on a $\widehat{u}(\xi) = u(\Phi(\xi)) = u_0 \circ \Phi(\xi)$. Or on connaît l'expression de la solution de $(\mathcal{P}_{\mathbb{D}, u_0 \circ \Phi})$, c'est la partie réelle de la fonction

$$\widehat{F}(\widehat{z}) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathcal{C}} \frac{u_0(\Phi(\xi))}{\xi} \frac{\xi + \widehat{z}}{\xi - \widehat{z}} d\xi.$$

On revient alors à l'expression de F en posant $\widehat{z} = \Phi^{-1}(z)$:

$$F(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathcal{C}} \frac{u_0(\Phi(\xi))}{\xi} \frac{\xi + \Phi^{-1}(z)}{\xi - \Phi^{-1}(z)} d\xi$$

et la fonction u cherchée s'obtient en prenant la partie réelle de F .

Bien sûr, cette expression de la solution n'est exploitable pratiquement que si on connaît explicitement à la fois Φ et Φ^{-1} , ce qui n'est pas si fréquent (quoique il existe des livres entiers qui sont des catalogues de transformation conforme). Néanmoins, même si on ne dispose pas de l'expression exacte de la transformation conforme ou de son inverse, cette représentation "explicite" de la solution peut être d'une grande aide, par exemple quand on veut avoir des renseignements qualitatifs sur la solution.

4.6 Exercices du chapitre 4

Exercice 1 : Soit Ω un ouvert simplement connexe, $z_0 \in \Omega$ et f et g deux transformations conformes qui envoient Ω sur le disque unité \mathbb{D} et qui envoient z_0 en 0. Quelle relation existe-t-il entre f et g ?

Exercice 2 : Soit f une transformation conforme de \mathbb{D} sur un carré de centre 0, avec $f(0) = 0$. Montrer que $f(iz) = if(z)$. Que peut-on en déduire pour les coefficients du développement en série entière de f ?

Exercice 3 : On pose $f_\alpha(z) = \frac{z}{1 + \alpha z^2}$. Trouver tous les nombres complexes α pour lesquels f_α est injective sur \mathbb{D} . Si α est réel et $-1 < \alpha < 1$ décrire $f_\alpha(\mathbb{D})$. Si $\alpha = 1$, montrer que $f_\alpha(\mathbb{D})$ est le plan complexe privé des deux demi-droites (portées par \mathbb{R}) $(-\infty, -1/2]$ et $[1/2, \infty)$.

Exercice 4 : Soit f une transformation conforme de \mathbb{D} sur un ouvert Ω de classe C^2 et soit Γ l'image du cercle unité. On suppose f holomorphe sur un ouvert contenant $\overline{\mathbb{D}}$. Montrer que le rayon de courbure ρ de Γ au point $f(e^{i\theta})$ est donné par

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\Re e \left[\frac{e^{i\theta} f''(e^{i\theta})}{f'(e^{i\theta})} \right] + 1}{|f'(e^{i\theta})|}.$$

Exercice 5 : Montrer que les fonctions suivantes définissent des transformations conformes sur les domaines indiqués et déterminer leur image.

a) $\frac{z^2 - i}{z^2 + i}$ sur $\{z = x + iy, x > 0, y > 0\}$.

b) $\sin z$ sur $\{z = x + iy, -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\}$.

c) $\frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right)$ sur $\{z; |z| > 1\}$.

d) $\int_0^z \frac{du}{\sqrt{1-u^2}\sqrt{1-k^2u^2}}$ ($0 < k < 1$) sur $\{z = x + iy, y > 0\}$.

Exercice 6 : Même question avec les applications suivantes définies sur le disque unité :

$$a) \frac{1}{(z+1)^2} \quad b) \frac{z}{(1-z)^2} \quad c) \int_{z_0}^z \frac{\sqrt{1-u^4}}{u^2} du \quad (z_0 \neq 0).$$

Chapitre 5

Transformée de Laplace

5.1 Définition, propriétés

5.1.1 La classe des fonctions L^+

Dans tout ce chapitre, nous serons amenés à travailler avec des fonctions définies sur \mathbb{R} et à valeurs dans \mathbb{R} ou \mathbb{C} . Nous noterons t la variable (t comme le temps, car dans la pratique on traite surtout des problèmes où le temps intervient). Comme les fonctions que nous manipulerons seront censées décrire l'évolution d'un système au cours du temps, à partir de la connaissance du système au temps initial ou $t = 0$, seules les valeurs positives de t nous intéresseront. Au lieu de manipuler des fonctions définies uniquement sur \mathbb{R}^+ , il s'avère plus commode dans la pratique de supposer, **par convention** que les fonctions sont nulles pour $t < 0$. Il sera très utile, dans ce contexte, d'introduire la fonction suivante appelée **échelon d'Heaviside** :

$$Y(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{si } t < 0. \end{cases} \quad (5.1)$$

Ainsi, quand nous noterons par exemple $Y(t)t$, il sera clair qu'il s'agit de la fonction qui vaut 0 pour t négatif et t pour t positif.

Outre cette condition de nullité pour les t négatifs, nous travaillerons avec des fonctions dont la croissance en $+\infty$ est au plus exponentielle. Plus précisément, donnons la définition suivante :

Définition 5.1 *On dira qu'une fonction f est à croissance au plus exponentielle en $+\infty$, s'il existe des réels A , c et M tels que*

$$\forall t \geq A, \quad |f(t)| \leq Me^{ct}. \quad (5.2)$$

*La borne inférieure de l'ensemble des réels c tels que (5.2) soit satisfait s'appelle **abscisse de convergence** de f et est notée $\sigma(f)$.*

Il est immédiat de vérifier que (5.2) est alors satisfait pour tout réel c tel que $c > \sigma(f)$.

Introduisons à présent la classe des fonctions pour lesquelles on pourra calculer la Transformée de Laplace. On rappelle qu'on dit qu'une fonction f est *localement intégrable* sur

\mathbb{R} si $\int_a^b |f(t)| dt$ est finie, pour tout segment $[a, b]$. C'est évidemment le cas des fonctions continues et plus généralement des fonctions bornées sur tout compact ce qui constitue la grosse majorité des fonctions qu'on rencontre dans la nature.

Définition 5.2 On notera L^+ la classe des fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ vérifiant

- f est nulle sur \mathbb{R}^- ,
- f est à croissance au plus exponentielle en $+\infty$,
- f est localement intégrable sur \mathbb{R} .

Il est facile de vérifier que L^+ est un espace vectoriel. Il contient la plupart des fonctions usuelles de la forme $Y(t)f(t)$ avec f continue. En effet, pour ne pas être dans L^+ , il faut vraiment avoir un comportement spécial en $+\infty$. L'exemple le plus simple d'une fonction qui n'est pas dans L^+ est celui de la fonction $Y(t)e^{t^2}$ qui tend vers l'infini extrêmement rapidement en $+\infty$.

5.1.2 La Transformée de Laplace

Définition 5.3 Soit f une fonction de L^+ et $\sigma(f)$ son abscisse de convergence (cf Définition 5.1). On appelle Transformée de Laplace de f et on note $\mathcal{L}(f)$ (ou F quand il n'y aura pas d'ambiguïté), la fonction de la variable complexe définie pour tout p tel que $\Re(p) > \sigma(f)$ par

$$\mathcal{L}(f)(p) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt} dt. \quad (5.3)$$

Justifions en effet que l'intégrale (5.3) est bien convergente quand p est tel que $\Re(p) > \sigma(f)$. Fixons un réel c tel que $\sigma(f) < c < \Re(p)$. On a $|f(t)e^{-pt}| = |f(t)|e^{-\Re(p)t}$. Soit A le nombre réel intervenant dans la définition de la croissance exponentielle à l'infini. Découpons l'intégrale en deux :

$$\int_0^{+\infty} |f(t)e^{-pt}| dt = \int_0^A |f(t)|e^{-\Re(p)t} dt + \int_A^{+\infty} |f(t)|e^{-\Re(p)t} dt.$$

Or

$$\int_0^A |f(t)|e^{-\Re(p)t} dt \leq \max(1, e^{-Ac}) \int_0^A |f(t)| dt < +\infty$$

car f est localement intégrable et

$$\int_A^{+\infty} |f(t)|e^{-\Re(p)t} dt \leq \int_A^{+\infty} Me^{ct}e^{-\Re(p)t} dt < +\infty$$

car $c - \Re(p) < 0$.

Dans certains ouvrages, la fonction $f(t)$ s'appelle *fonction objet* ou *original* tandis que la fonction $F(p) = \mathcal{L}(f)(p)$ s'appelle *fonction image*. Donnons quelques exemples élémentaires de Transformée de Laplace (il existe des livres entiers de tables de Transformée de Laplace, par exemple celui de G. Doetsch, auquel on peut se référer), voir aussi le Mini-Dictionnaire à la section 5.1.4.

Exemple 1 : Calculons la Transformée de Laplace des fonctions puissances $f_n(t) = Y(t)t^n$ pour n entier naturel (le cas $n = 0$ correspondant à l'échelon d'Heaviside). Tout

d'abord, on a clairement $\sigma(f_n) = 0$ car pour tout $c > 0$, la fonction $t^n e^{-ct}$ est continue bornée sur \mathbb{R}^+ , donc (5.2) est vérifié pour tout $c > 0$. Notons $F_n(p) = \mathcal{L}(f_n)(p)$. En intégrant par parties, on a la relation de récurrence (pour p tel que $\Re(p) > 0$)

$$F_{n+1}(p) = \int_0^{+\infty} t^{n+1} e^{-pt} dt = \frac{n+1}{p} \int_0^{+\infty} t^n e^{-pt} dt = \frac{n+1}{p} F_n(p). \quad (5.4)$$

Comme $F_0(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} dt = \frac{1}{p}$ (si vous n'êtes pas convaincus passez en partie réelle et partie imaginaire!) on tire de (5.4) la formule

$$F_n(p) = \mathcal{L}(Y(t)t^n)(p) = \frac{n!}{p^{n+1}}. \quad (5.5)$$

Exemple 2 : Soit α un nombre complexe, alors il est facile de vérifier que la fonction $f(t) = e^{\alpha t}$ est dans L^+ et que son abscisse de convergence est $\sigma(f) = \Re(\alpha)$. De plus sa Transformée de Laplace est donnée par

$$\mathcal{L}(Y(t)e^{\alpha t})(p) = \int_0^{+\infty} e^{(\alpha-p)t} dt = \frac{1}{p-\alpha} \quad \text{pour } \Re(p) > \Re(\alpha). \quad (5.6)$$

5.1.3 Propriétés de la Transformée de Laplace

5.1.3.1 Holomorphicité

La première propriété fondamentale d'une Transformée de Laplace, qui justifie d'ailleurs le placement de ce chapitre dans un cours sur les fonctions holomorphes, est la suivante :

Théorème 5.4 Soit $f \in L^+$, alors la fonction $F(p) = \mathcal{L}(f)(p)$ est holomorphe sur le demi-plan ouvert $\{p \in \mathbb{C}, \Re(p) > \sigma(f)\}$. Sa dérivée est

$$F'(p) = \mathcal{L}(-tf)(p) = \int_0^{+\infty} (-t)f(t)e^{-pt} dt.$$

Démonstration : On utilise le Théorème 3.5 énoncé au chapitre 3. Fixons nous $c > \sigma(f)$, on va travailler sur le demi-plan $\Omega = \{p \in \mathbb{C}, \Re(p) > c\}$.

- (i) La fonction $t \mapsto f(t)e^{-pt}$ est mesurable puisque f l'est tandis que la fonction $p \mapsto f(t)e^{-pt}$ est clairement holomorphe sur Ω .
- (ii) Pour tout $t \in [0, +\infty[$ et tout $p \in \Omega$, on a $|f(t)e^{-pt}| \leq |f(t)|e^{-ct}$, cette dernière fonction étant, bien sûr indépendante de p et surtout intégrable comme on l'a prouvé ci-dessus en montrant que l'intégrale (5.3) est convergente.

Les hypothèses du Théorème 3.5 étant vérifiées, le résultat est montré. \square

Remarquons que la démonstration ci-dessus indique que $tf(t)$ est dans L^+ avec la même abscisse de convergence que f , propriété qu'on peut d'ailleurs vérifier directement facilement. De même $t^n f(t)$ est dans L^+ pour tout entier naturel n , et le Théorème 5.4 réappliqué un certain nombre de fois fournit : la dérivée n -ième de $\mathcal{L}(f)$ est donnée pour $\Re(p) > \sigma(f)$ par

$$\mathcal{L}(f)^{(n)}(p) = \int_0^{+\infty} (-t)^n f(t)e^{-pt} dt. \quad (5.7)$$

5.1.3.2 Linéarité

Si f et g sont deux fonctions de L^+ et α, β deux réels, on a immédiatement par linéarité de l'intégrale :

$$\mathcal{L}(\alpha f + \beta g) = \alpha \mathcal{L}(f) + \beta \mathcal{L}(g) \quad (\text{définie pour } \Re(p) > \max(\sigma(f), \sigma(g))). \quad (5.8)$$

5.1.3.3 Décalage

Si f est dans L^+ et $a \in \mathbb{R}$, on voit facilement que $t \mapsto e^{at} f(t)$ est encore dans L^+ (avec une abscisse de convergence qui devient $\sigma(f) + a$) et on a immédiatement

$$\mathcal{L}(e^{at} f(t))(p) = \mathcal{L}(f)(p - a). \quad (5.9)$$

5.1.3.4 Retard

Si f est dans L^+ et $t_0 \geq 0$, on voit facilement que $t \mapsto f(t - t_0)$ est dans L^+ et on a immédiatement par changement de variable (n'oubliez pas que f est nulle sur $[-t_0, 0[$)

$$\mathcal{L}(f(t - t_0))(p) = e^{-pt_0} \mathcal{L}(f)(p). \quad (5.10)$$

5.1.3.5 Changement d'échelle

Si f est dans L^+ et $a > 0$, on voit facilement que $t \mapsto f(at)$ est encore dans L^+ et on a immédiatement par changement de variable

$$\mathcal{L}(f(at))(p) = \frac{1}{a} \mathcal{L}(f)\left(\frac{p}{a}\right). \quad (5.11)$$

5.1.3.6 Transformée d'une dérivée

Soit f une fonction de L^+ , dérivable, et supposons que sa dérivée soit encore dans L^+ (c'est presque toujours le cas, mais une fonction comme $f(t) = \cos(e^{t^2})$ fournit un contre-exemple) avec la même abscisse de convergence : $\sigma(f) = \sigma(f')$. Supposons également que f possède une limite à droite en 0 que nous noterons $f(0^+)$. Alors on a immédiatement grâce à une intégration par parties (comme $f \in L^+$, on a $f(t)e^{-pt} \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow +\infty$ dès que $\Re(p) > \sigma(f)$)

$$\mathcal{L}(f')(p) = p \mathcal{L}(f)(p) - f(0^+). \quad (5.12)$$

En réitérant la formule précédente, on montre par récurrence que si $f \in L^+$ est telle que $f', f'', \dots, f^{(n)}$ sont toutes des fonctions de L^+ alors

$$\mathcal{L}(f^{(n)})(p) = p^n \mathcal{L}(f)(p) - p^{n-1} f(0^+) - p^{n-2} f'(0^+) - \dots - p f^{(n-2)}(0^+) - f^{(n-1)}(0^+). \quad (5.13)$$

Enfin, si f_1 désigne la primitive de la fonction f qui s'annule en 0, on tire immédiatement de la formule (5.12)

$$\text{Pour } p \text{ tel que } \Re(p) > \sigma(f) \quad f_1(t) = \int_0^t f(s) ds \quad \implies \quad \mathcal{L}(f_1)(p) = \frac{\mathcal{L}(f)(p)}{p} \quad (5.14)$$

5.1.3.7 Convolution

Définition 5.5 Soit f et g deux fonctions de L^+ , on appelle convolée de f et g et on note $f * g$ la fonction définie par

$$f * g(x) = \int_0^x f(t)g(x-t) dt = \int_{\mathbb{R}} f(t)g(x-t) dt. \quad (5.15)$$

La deuxième égalité dans (5.15) vient du fait que f et g sont toutes deux nulles sur \mathbb{R}^- . Le fait que la fonction $f * g$ soit bien définie quand f et g sont toutes deux des fonctions continues est clair, mais ce n'est plus aussi évident quand f et g sont simplement intégrables sur tout segment. Par ailleurs, puisque nous allons être amenés à calculer la Transformée de Laplace de $f * g$, nous avons besoin de

Théorème 5.6 Si f et g sont dans L^+ , alors la fonction $f * g$ est définie pour presque tout x de \mathbb{R} et elle est dans L^+ (avec $\sigma(f * g) = \max(\sigma(f), \sigma(g))$).

Démonstration : Il est clair sur la définition de $f * g$ que cette fonction est nulle sur \mathbb{R}^- puisque f elle-même l'est. Montrons d'un seul coup que $f * g$ est bien définie et localement intégrable sur \mathbb{R} . Fixons un réel $A > 0$ et calculons $\int_0^A |f * g(x)| dx$ (qui est éventuellement égal à $+\infty$) :

$$\int_0^A |f * g(x)| dx \leq \int_0^A \left(\int_0^x |f(t)g(x-t)| dt \right) dx \leq \int_0^A \left(\int_0^A |f(t)g(x-t)| dt \right) dx.$$

On intervertit l'ordre des intégrations, il vient

$$\int_0^A |f * g(x)| dx \leq \int_0^A |f(t)| \left(\int_0^A |g(x-t)| dx \right) dt.$$

Dans l'intégrale entre parenthèses, on fait le changement de variable $u = x - t$, on obtient

$$\int_0^A |g(x-t)| dx = \int_{-t}^{A-t} |g(u)| du = \int_0^{A-t} |g(u)| du \leq \int_0^A |g(u)| du,$$

si bien qu'on obtient finalement :

$$\int_0^A |f * g(x)| dx \leq \int_0^A |f(t)| dt \int_0^A |g(u)| du < +\infty \quad (5.16)$$

puisque f et g sont toutes deux localement intégrables (c'est-à-dire intégrables sur tout segment). On tire également de (5.16), le fait que $f * g(x)$ est bien définie pour presque tout x (puisque une fonction dont l'intégrale est finie ne peut pas prendre des valeurs infinies sur un ensemble de mesure strictement positive).

Il reste à prouver que $f * g$ a une croissance au plus exponentielle à l'infini. Par hypothèse, on a

$$\exists A_1 > 0, M_1 > 0, c_1 \in \mathbb{R} \text{ tels que } \forall t \geq A_1, \quad |f(t)| \leq M_1 e^{c_1 t}$$

et

$$\exists A_2 > 0, M_2 > 0, c_2 \in \mathbb{R} \text{ tels que } \forall t \geq A_2, \quad |g(t)| \leq M_2 e^{c_2 t}.$$

Supposons, pour fixer les idées que $\sigma(f) \geq \sigma(g)$ (on verra ci-dessous que le produit de convolution est commutatif et donc on est en droit de se placer dans ce cas) et fixons $c_1 > \sigma(f)$ et $c_2 > \sigma(f) \geq \sigma(g)$ avec $c_1 \geq c_2$. Prenons $x > A_1 + A_2$ et majorons $|f * g(x)|$:

$$|f * g(x)| \leq \int_0^x |f(t)g(x-t)| dt = \int_0^{A_1} |f(t)g(x-t)| dt + \int_{A_1}^x |f(t)g(x-t)| dt. \quad (5.17)$$

Puisque $x > A_1 + A_2$, quand $0 \leq t \leq A_1$, on a $x-t > A_2$ et donc, en utilisant l'hypothèse de croissance exponentielle pour g , la première intégrale dans (5.17) peut être majorée par

$$\int_0^{A_1} |f(t)g(x-t)| dt \leq M_2 \int_0^{A_1} |f(t)|e^{c_2(x-t)} dt = M_2 e^{c_2 x} \int_0^{A_1} |f(t)|e^{-c_2 t} dt = M e^{c_2 x}$$

où M est une constante indépendante de x .

Dans la deuxième intégrale de (5.17), $x > A_1$ et cette fois, on utilise l'hypothèse pour f :

$$\int_{A_1}^x |f(t)g(x-t)| dt \leq M_1 \int_{A_1}^x e^{c_1 t} |g(x-t)| dt.$$

Dans cette dernière intégrale, on fait le changement de variable $u = x - t$, il vient :

$$\int_{A_1}^x e^{c_1 t} |g(x-t)| dt = e^{c_1 x} \int_0^{x-A_1} |g(u)|e^{-c_1 u} du \leq e^{c_1 x} \int_0^{+\infty} |g(u)|e^{-c_1 u} du$$

cette dernière intégrale étant convergente puisque $c_1 > \sigma(g)$. En posant $M' = M_1 \int_0^{+\infty} |g(u)|e^{-c_1 u} du$, on arrive finalement en remplaçant dans (5.17) à

$$\text{Pour tout } x > A_1 + A_2 \quad |f * g(x)| \leq M e^{c_2 x} + M' e^{c_1 x} \leq (M + M') e^{c_1 x}$$

ce qui achève la démonstration du Théorème. □

Citons à présent les propriétés élémentaires du produit de convolution :

Proposition 5.7 *Le produit de convolution est linéaire vis-à-vis de chacun de ses termes, commutatif et associatif.*

La linéarité provient immédiatement de la linéarité de l'intégrale. La commutativité ($f * g = g * f$) s'obtient grâce au changement de variable $u = x - t$ dans l'intégrale. Quant à l'associativité ($f * (g * h) = (f * g) * h$), on l'obtient à l'aide d'une double intégration et de l'interversion de l'ordre des intégrations (le calcul est un peu long mais *straightforward* comme on dit quand on est snob).

Venons en au principal intérêt de la convolution pour la Transformée de Laplace :

Théorème 5.8 *Si f et g sont dans L^+ alors $\mathcal{L}(f * g) = \mathcal{L}(f)\mathcal{L}(g)$ (cette fonction étant définie pour p tel que $\Re(p) > \max(\sigma(f), \sigma(g))$).*

Remarquons que le calcul de $\mathcal{L}(f * g)$ est bien licite d'après le Théorème 5.6. Autrement dit la Transformée de Laplace transforme un produit de convolution en produit usuel. C'est surtout dans l'autre sens que cette propriété sera précieuse : quand on reconnaîtra le produit de deux Transformées de Laplace, on saura qu'il s'agit de la Transformée de Laplace du produit de convolution des deux fonctions originales.

Démonstration : Fixons p tel que $\Re(p) > \max(\sigma(f), \sigma(g))$, on a

$$\mathcal{L}(f * g)(p) = \int_0^{+\infty} f * g(x) e^{-px} dx = \int_0^{+\infty} \left(\int_0^x f(t) g(x-t) e^{-px} dt \right) dx.$$

Intervertissons l'ordre des intégrations dans cette dernière intégrale. Puisqu'à x fixé, t varie entre 0 et x , à t fixé, x varie entre t et $+\infty$ (faire un dessin)

$$\mathcal{L}(f * g)(p) = \int_0^{+\infty} f(t) \left(\int_t^{+\infty} g(x-t) e^{-px} dx \right) dt.$$

Dans l'intégrale entre parenthèses, on fait le changement de variable $u = x - t$, il vient

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(f * g)(p) &= \int_0^{+\infty} f(t) \left(\int_0^{+\infty} g(u) e^{-pt} e^{-pu} du \right) dt = \\ &= \int_0^{+\infty} f(t) e^{-pt} dt \int_0^{+\infty} g(u) e^{-pu} du = \mathcal{L}(f)(p) \mathcal{L}(g)(p). \end{aligned}$$

□

5.1.3.8 Comportement aux bornes

Le comportement d'une Transformée de Laplace aux bornes de son domaine de définition est lié à celui de la fonction originale. La connaissance des résultats qui suivent s'avèrera fort utile dans l'utilisation de la Transformée de Laplace pour la résolution d'équations différentielles ou intégrales afin d'éliminer des solutions impossibles (voir le dernier paragraphe de ce chapitre).

Théorème 5.9 *La Transformée de Laplace d'une fonction de L^+ tend vers 0 quand $\Re(p) \rightarrow +\infty$.*

Plus précisément, si $f \in L^+$ possède une limite à droite $f(0^+)$ à l'origine, alors

$$p\mathcal{L}(f)(p) \rightarrow f(0^+) \quad \text{quand } p \rightarrow +\infty \text{ (} p \text{ réel)}. \quad (5.18)$$

Démonstration : Considérons un nombre complexe p avec $\Re(p) \geq c > \sigma(f)$. Alors, $|f(t)e^{-pt}| \leq |f(t)|e^{-ct} \in L^1(\mathbb{R})$ et $|f(t)e^{-pt}| \rightarrow 0$ quand $\Re(p) \rightarrow +\infty$ pour presque tout t (en fait pour tout t , sauf pour $t = 0$). Le Théorème de convergence dominée de Lebesgue fournit alors la première partie du Théorème 5.9.

Pour la seconde partie, on commence par observer que $f(0^+) = pf(0^+) \int_0^{+\infty} e^{-pt} dt$ et on forme la différence

$$p\mathcal{L}(f)(p) - f(0^+) = p \int_0^{+\infty} (f(t) - f(0^+)) e^{-pt} dt.$$

Fixons maintenant un réel $\varepsilon > 0$ petit. Par hypothèse, il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $t \in [0, \alpha]$, $|f(t) - f(0^+)| < \varepsilon/3$. on découpe alors l'intégrale ci-dessus en

$$\begin{aligned} p\mathcal{L}(f)(p) - f(0^+) &= \\ p \int_0^\alpha (f(t) - f(0^+)) e^{-pt} dt &+ p \int_\alpha^A (f(t) - f(0^+)) e^{-pt} dt + p \int_A^{+\infty} (f(t) - f(0^+)) e^{-pt} dt \end{aligned} \quad (5.19)$$

(le réel A est celui qui apparait dans la définition de la croissance exponentielle à l'infini de f). On majore la première intégrale ci-dessus par

$$|p \int_0^\alpha (f(t) - f(0^+))e^{-pt} dt| \leq p \frac{\varepsilon}{3} \int_0^\alpha e^{-pt} dt = \frac{\varepsilon}{3} (1 - e^{-p\alpha}) \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

Quant à la deuxième intégrale, elle peut être majorée par

$$|p \int_\alpha^{+\infty} (f(t) - f(0^+))e^{-pt} dt| \leq pe^{-p\alpha} \int_\alpha^A |f(t) - f(0^+)| dt$$

quantité qui tend vers 0 quand $p \rightarrow +\infty$. Enfin la troisième intégrale dans (5.19) est majorée par

$$|p \int_A^{+\infty} (f(t) - f(0^+))e^{-pt} dt| \leq p \int_A^{+\infty} (Me^{ct} + |f(0^+)|)e^{-pt} dt = e^{-pA} \left(\frac{Mp}{p-c} e^{cA} + |f(0^+)| \right)$$

quantité qui tend également vers 0 quand $p \rightarrow +\infty$ ce qui achève la démonstration. \square

Dans le cas où f est intégrable sur \mathbb{R}^+ , on démontre très simplement à l'aide du Théorème de convergence dominée

$$\lim_{p \rightarrow 0} \mathcal{L}(f)(p) = \int_0^{+\infty} f(t) dt. \quad (5.20)$$

5.1.4 Petit dictionnaire

Il existe des livres entiers qui sont des catalogues de Transformées de Laplace (par exemple celui de G. Doetsch). Le petit tableau ci-dessous est beaucoup plus modeste, mais vous rendra service dans certains exercices ou certaines situations très classiques. Vous pourrez établir ces formules en Exercice en vous servant des résultats et propriétés de la Transformée de Laplace énoncés précédemment. Une bonne méthode pour démontrer ces formules consiste à les établir pour p réel (positif) puis à les étendre à tout p complexe à l'aide du principe du prolongement analytique. Dans la table ci-dessous, J_n désigne la n -ième fonction de Bessel de première espèce définie par

$$J_n(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(n+k)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k}. \quad (5.21)$$

Original $f(t)$	Paramètres	Abscisse de convergence $\sigma(f)$	Transformée de Laplace $F(p)$
$Y(t)t^n$	n entier	0	$\frac{n!}{p^{n+1}}$
$Y(t)e^{-at}t^n$	$a \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}$	$-\Re(a)$	$\frac{n!}{(p+a)^{n+1}}$
$Y(t)e^{-\mu t} \cos \omega t$	$\mu, \omega \in \mathbb{R}$	$-\mu$	$\frac{p+\mu}{(p+\mu)^2 + \omega^2}$
$Y(t)e^{-\mu t} \sin \omega t$	$\mu, \omega \in \mathbb{R}$	$-\mu$	$\frac{\omega}{(p+\mu)^2 + \omega^2}$
$Y(t)e^{-\mu t} \cosh \omega t$	$\mu, \omega \in \mathbb{R}$	$-\mu + \omega $	$\frac{p+\mu}{(p+\mu)^2 - \omega^2}$
$Y(t)e^{-\mu t} \sinh \omega t$	$\mu, \omega \in \mathbb{R}$	$-\mu + \omega $	$\frac{\omega}{(p+\mu)^2 - \omega^2}$
$Y(t)t^\alpha$	$\alpha \in \mathbb{R}, \alpha > -1$	0	$\frac{\Gamma(\alpha+1)}{p^{\alpha+1}}$
$\frac{Y(t)}{\sqrt{t}}$		0	$\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{p}}$
$Y(t)J_0(\omega t)$	$\omega \in \mathbb{R}$	0	$\frac{1}{\sqrt{p^2 + \omega^2}}$
$Y(t)J_0(2\sqrt{\omega t})$	$\omega \in \mathbb{R}, \omega > 0$	0	$\frac{1}{p} e^{-\frac{\omega}{p}}$
$Y(t)J_n(t)$	$n \in \mathbb{N}$	0	$\frac{(\sqrt{p^2+1}-p)^n}{\sqrt{p^2+1}}$
$Y(t)\frac{J_1(t)}{t}$		0	$\frac{1}{\sqrt{p^2+1+p}}$
$Y(t)\frac{ae^{-a^2/4t}}{2\sqrt{\pi t^{3/2}}}$	$a \in \mathbb{R}, a > 0$	0	$e^{-a\sqrt{p}}$

5.1.5 Inversion de la Transformée de Laplace

Dans ce paragraphe, nous allons donner une formule intégrale qui permet de retrouver la fonction originale $f(t)$ en connaissant sa Transformée de Laplace $F(p)$. Pour cette raison, on l'appelle formule d'inversion de la Transformée de Laplace. Elle est basée sur la formule d'inversion de la Transformée de Fourier que vous verrez dans le cours de Distributions dans lequel vous ferez proprement les démonstrations que je vais seulement présenter de manière un peu formelle ici, c'est-à-dire sans me préoccuper des hypothèses précises à mettre sur les fonctions f et F .

Rappelons tout d'abord quelques notions concernant la Transformée de Fourier. Le meilleur cadre pour présenter ces notions est celui des distributions, mais même dans le cas des fonctions on peut introduire :

Définition 5.10 Soit f une fonction intégrable sur \mathbb{R} , on appelle Transformée de Fourier de f (resp. Transformée de Fourier inverse de f) la fonction définie par

$$\mathcal{F}(f)(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-iyt} dt \quad (5.22)$$

respectivement

$$\overline{\mathcal{F}}(f)(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{iyt} dt. \quad (5.23)$$

On a alors le résultat remarquable suivant :

Théorème 5.11 Soit f une fonction intégrable sur \mathbb{R} telle que $\mathcal{F}(f)$ soit intégrable sur \mathbb{R} . Alors on a la formule

$$\overline{\mathcal{F}}(\mathcal{F}(f)) = 2\pi f. \quad (5.24)$$

Comme les transformées de Laplace et de Fourier ont quelques similitudes, on va déduire de ce résultat la formule d'inversion pour les Transformées de Laplace. Soit f une fonction de L^+ . Appliquons la formule (5.24) à la fonction $\phi(t)$ définie par

$$\phi(t) = e^{-ct} f(t) \quad (5.25)$$

(ϕ est bien dans $L^1(\mathbb{R})$ pour $c > \sigma(f)$). Supposons que sa Transformée de Fourier soit également dans $L^1(\mathbb{R})$, il vient d'après (5.24)

$$\phi(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iyt} \left(\int_0^{+\infty} f(s)e^{-cs} e^{-iys} ds \right) dy \quad (5.26)$$

(l'intégration ne se fait que de 0 à $+\infty$ dans la deuxième intégrale car f est nulle sur \mathbb{R}^-). Dans l'intégrale ci-dessus posons, $p = c + iy$. Le domaine d'intégration en y devient la droite verticale d'abscisse c , nous noterons les bornes $c - i\infty$ et $c + i\infty$ pour signifier qu'on intègre sur cette droite verticale. L'égalité (5.26) se réécrit :

$$\phi(t) = \frac{1}{2i\pi} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{(p-c)t} \left(\int_0^{+\infty} f(s)e^{-ps} ds \right) dp.$$

On reconnaît dans l'intégrale entre parenthèses la Transformée de Laplace $F(p)$ de la fonction $f(t)$, si bien que cette dernière formule donne après simplification par e^{-ct} :

$$f(t) = \frac{1}{2i\pi} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} F(p)e^{pt} dp. \quad (5.27)$$

On a donc "prouvé" :

Théorème 5.12 Soit $f(t)$ une fonction de L^+ et $F(p)$ sa Transformée de Laplace. Soit c un réel, $c > \sigma(f)$. On suppose que la Transformée de Fourier de $e^{-ct}f(t)$ est intégrable sur \mathbb{R} , alors on peut retrouver f à partir de F par la formule (dite de Mellin-Fourier)

$$f(t) = \frac{1}{2i\pi} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} F(p)e^{pt} dp. \quad (5.28)$$

où l'intégration se fait sur la droite verticale d'abscisse c .

Remarque 5.1 L'hypothèse sur l'intégrabilité de la Transformée de Fourier de $e^{-ct}f(t)$ n'étant pas très explicite, on peut chercher à l'exprimer directement sur $F(p)$. En fait, le principe est que la formule (5.28) est valable dès que le second membre de (5.28) a un sens. Une classe de fonctions pour lesquelles cette formule de Mellin-Fourier est valable est constituée des fonctions F qui se prolongent de façon holomorphe au plan complexe tout entier, à l'exception d'éventuelles singularités isolées et qui satisfont $|F(p)| \rightarrow 0$ uniformément quand $|p| \rightarrow +\infty$. Pour s'en convaincre, cf Remarque 5.3 ci-dessous. Dans le cadre de la théorie des Distributions (voir deuxième partie du cours), on peut donner des hypothèses beaucoup moins fortes pour que cette formule soit vraie.

Remarque 5.2 On peut prouver que l'intégrale qui apparaît dans la formule de Mellin-Fourier est indépendante du réel c choisi (supérieur à $\sigma(f)$). Pour le voir, il suffit d'intégrer sur un rectangle dont les côtés verticaux correspondent à deux abscisses différentes et d'appliquer la formule de Cauchy. L'intégrale sur le bord du rectangle étant nulle et chacune des intégrales sur les côtés horizontaux tendant vers 0, on en déduit bien que les deux intégrales sur les droites verticales sont égales.

Remarque 5.3 Pour calculer explicitement l'intégrale dans la formule de Mellin-Fourier, au moins pour une fonction F qui satisfait les hypothèses de la Remarque 5.1, on utilise traditionnellement le contour suivant appelé *contour de Bromwich* (cf Figure 5.1) et la formule des résidus. On montre que l'intégrale sur le demi-cercle tend vers 0 quand $R \rightarrow +\infty$, soit directement, soit en utilisant un Lemme identique au Lemme de Jordan 2.4. Je ne donne pas d'exemples explicites ici, cf la section Exercices.

Remarque 5.4 Une conséquence importante de la Formule d'inversion de la Transformée de Laplace est l'**injectivité de la Transformée de Laplace** :

$$\mathcal{L}(f_1) = \mathcal{L}(f_2) \implies f_1 = f_2 \text{ p.p.} \quad (5.29)$$

5.2 Applications de la Transformée de Laplace

5.2.1 Aux équations différentielles ordinaires

Considérons, pour commencer, le cas d'une équation à coefficients constants. L'exemple qui suit a pour objet de présenter la méthode, nous laissons le soin au lecteur de généra-

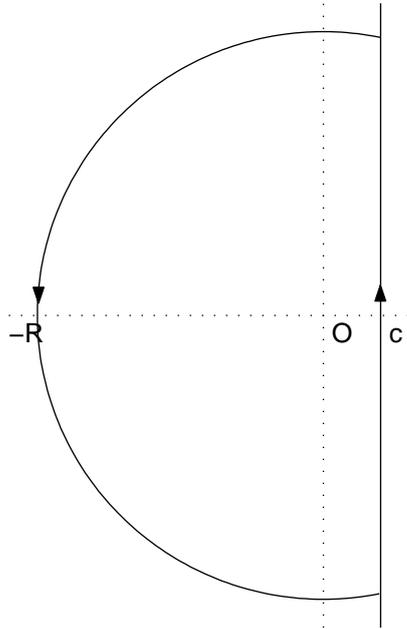


FIGURE 5.1 – Contour de Bromwich

liser à une équation quelconque.

$$\begin{cases} y''' + 4y'' + 5y' + 2y = 1 \\ y(0) = y'(0) = y''(0) = 0. \end{cases} \quad (5.30)$$

En notant Y la Transformée de Laplace de y et en prenant la Transformée de l'égalité dans (5.30), il vient compte-tenu des relations (5.12) et des conditions initiales

$$(p^3 + 4p^2 + 5p + 2)Y(p) = \frac{1}{p}$$

ou encore, en décomposant en éléments simples la fraction rationnelle

$$Y(p) = \frac{1}{p(p+1)^2(p+2)} = \frac{1/2}{p} - \frac{1}{(p+1)^2} - \frac{1/2}{p+2}.$$

D'où, en utilisant par exemple la Table et la formule de décalage (5.9), on obtient

$$y(t) = \frac{1}{2} - te^{-t} - \frac{1}{2}e^{-2t}.$$

Sur l'exemple précédent, on ne voit pas trop ce qu'on a gagné vis-à-vis de la méthode traditionnelle faisant intervenir l'équation caractéristique sinon peut-être une plus grande simplicité des calculs qui se présentent de manière plus systématique (il n'y a plus besoin de discuter sur les racines simples ou multiples de l'équation caractéristique).

Donnons à présent un exemple d'une équation linéaire, mais à coefficients non constants (la caractéristique linéaire semble incontournable si on veut utiliser la Transformée de Laplace).

$$\begin{cases} ty''(t) + (2t+3)y'(t) + (t+3)y(t) = 0 \\ y(0) = y_0 \quad (\text{donné}). \end{cases} \quad (5.31)$$

Là encore, on cherche les solutions de (5.31) qui sont dans L^+ . Prenons la Transformée de Laplace de l'équation différentielle. On note $Y(p) = \mathcal{L}(y)$. Il vient, en utilisant la formule (5.12) et celle qui donne la dérivée d'une Transformée de Laplace :

$$\mathcal{L}(ty''(t)) = -\frac{d}{dp}(\mathcal{L}(y'')) = -\frac{d}{dp}(p^2Y(p) - py_0 - y_1) = -p^2Y'(p) - 2pY(p) + y_0$$

en notant y_1 la valeur de $y'(0)$ qui n'intervient pas dans le calcul. De même

$$\mathcal{L}(ty'(t)) = -\frac{d}{dp}(\mathcal{L}(y')) = -pY'(p) - Y(p)$$

si bien que l'équation en $Y(p)$ devient

$$-(p+1)^2Y'(p) + (p+1)Y(p) = 2y_0. \quad (5.32)$$

La solution générale de l'équation (5.32) sans second membre est $c(p+1)$ où c est une constante arbitraire. Pour trouver une solution particulière, on utilise la méthode de variation de la constante, on trouve $\frac{y_0}{p+1}$ si bien que la solution générale de l'équation (5.32) est

$$Y(p) = \frac{y_0}{p+1} + c(p+1). \quad (5.33)$$

Or on a vu au Théorème 5.9 qu'une Transformée de Laplace devait tendre vers 0 quand p tend vers $+\infty$. Il en résulte que dans (5.33) la constante c doit être nulle, c'est-à-dire que $Y(p) = \frac{y_0}{p+1}$. On reconnaît là la Transformée de Laplace de e^{-t} si bien que la solution de l'équation (5.31) qui est dans L^+ est y_0e^{-t} . Comme l'ensemble des solutions de cette équation différentielle forme un espace vectoriel de dimension 2, il est possible qu'il existe une autre solution, mais celle-ci ne doit pas être dans L^+ . Le lecteur s'amusera à la chercher en faisant le changement de fonction inconnue $y = ze^{-t}$.

5.2.2 Aux équations intégrales

Equation de Volterra de première espèce

Deux fonctions f et k étant données (k s'appelle un noyau), il s'agit de trouver une fonction u qui satisfait l'équation intégrale suivante, dite équation intégrale de Volterra de première espèce

$$\int_0^t u(s)k(t-s) ds = f(t). \quad (5.34)$$

On suppose bien entendu que toutes les fonctions qu'on manipule sont dans L^+ . On peut réécrire l'équation (5.34) en utilisant le produit de convolution : $u*k = f$. Si on introduit alors les Transformées de Laplace U, K, F de u, k, f respectivement, l'équation (5.34) se transforme en $UK = F$ qui fournit immédiatement $U = \frac{F}{K}$. Il reste alors à retrouver l'original, soit en utilisant un dictionnaire et les règles de calcul usuelles, soit à l'aide de la formule de Mellin-Fourier.

Equation de Volterra de deuxième espèce

On se donne encore deux fonctions f et k et un réel α , il s'agit là de trouver une fonction u qui satisfait l'équation intégrale suivante, dite équation intégrale de Volterra de deuxième espèce

$$\alpha u(t) + \int_0^t u(s)k(t-s) ds = f(t). \quad (5.35)$$

Si on suppose encore que toutes les fonctions sont dans L^+ l'équation se réécrit : $\alpha u + u * k = f$. En passant en Transformée de Laplace U, K, F on obtient $\alpha U + UK = F$ qui fournit immédiatement la solution $U = \frac{F}{\alpha + K}$. Il reste alors à retrouver l'original comme précédemment.

5.2.3 Aux équations aux dérivées partielles

On considère l'équation aux dérivées partielles

$$x \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial t} = xe^{-t} \quad (5.36)$$

où $\phi(t, x)$ est une fonction des variables $t > 0$ et $x, x \in]0, 1[$. On se donne de plus la condition initiale $\phi(0, x) = x$.

Cherchons une solution de (5.36) qui soit dans L^+ . On introduit $\Phi(p, x)$ la Transformée de Laplace de ϕ par rapport à la variable t , c'est-à-dire

$$\Phi(p, x) = \int_0^{+\infty} \phi(t, x)e^{-pt} dt.$$

Nous souhaitons prendre la Transformée de Laplace de l'équation (5.36). Il nous faut calculer $\mathcal{L}(\frac{\partial \phi}{\partial x})$ et $\mathcal{L}(\frac{\partial \phi}{\partial t})$. Pour la première, comme la variable d'intégration dans Laplace est t et non x , on permute simplement dérivation et intégration. Bien sûr, une telle permutation nécessite normalement de vérifier certaines hypothèses, mais la fonction ϕ étant inconnue, nous ne sommes pas capables de vérifier ces hypothèses. En fait, on cherche à deviner la solution d'une équation quitte à vérifier ensuite, directement sur l'équation, que la fonction trouvée convient bien. On a donc

$$\mathcal{L}(\frac{\partial \phi}{\partial x}) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial \phi}{\partial x}(t, x)e^{-pt} dt = \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{+\infty} \phi(t, x)e^{-pt} dt = \frac{\partial \Phi}{\partial x}.$$

Pour $\mathcal{L}(\frac{\partial \phi}{\partial t})$, c'est différent : on utilise les formules de dérivation pour les Transformées de Laplace :

$$\mathcal{L}(\frac{\partial \phi}{\partial t}) = p\mathcal{L}(\phi) - \phi(0, x) = p\Phi(p, x) - x.$$

D'où finalement, l'équation (5.36) devient

$$x \frac{\partial \Phi}{\partial x} + p\Phi(p, x) - x = \mathcal{L}(xe^{-t}) = \frac{x}{p+1} \quad (5.37)$$

qui est une équation différentielle en la variable x . On voit là l'intérêt de la Transformée de Laplace qui transforme une équation aux dérivées partielles en une banale équation différentielle. On résout aisément l'équation (5.37) qui est linéaire du premier ordre (cette fois, c'est x la variable et p joue le rôle d'un paramètre). La solution générale de (5.37) est

$$\Phi(x, p) = \frac{C}{x^p} + x \frac{(p+2)}{(p+1)^2}$$

où C est une constante. Maintenant, on utilise le fait qu'une Transformée de Laplace doit tendre vers 0 quand p (réel) tend vers l'infini. Comme $x \in]0, 1[$, $\frac{1}{x^p} \rightarrow +\infty$ quand $p \rightarrow +\infty$. Ceci implique que, si on cherche une solution admissible (c'est-à-dire qui soit dans L^+), on doit nécessairement prendre $C = 0$. Il reste donc

$$\Phi(x, p) = x \frac{(p+2)}{(p+1)^2} = x \frac{1}{p+1} + x \frac{1}{(p+1)^2}$$

et on reconnaît là la Transformée de Laplace de $x(e^{-t} + te^{-t})$ qui fournit la solution cherchée.

5.3 Exercices du chapitre 5

Exercice 1 : Déterminer l'abscisse de convergence et la Transformée de Laplace des fonctions suivantes

$$f(t) = Y(t)\sqrt{t} \quad f(t) = Y(t)t^{n+1/2} \quad f(t) = Y(t)a^t \quad (a > 1) \quad f(t) = Y(t) \cosh(at)$$

Exercice 2 : Démontrer les formules du Petit Dictionnaire (pour les fonctions de Bessel, on prendra la Transformée de Laplace du développement en série).

Exercice 3 : Soit $\phi_\alpha(t) = Y(t)t^\alpha$. Calculer $\phi_\alpha * \phi_\beta$.

Exercice 4 : Déterminer l'original des Transformées de Laplace suivantes (a, b sont des réels, $a \neq 0$) :

$$F(p) = \frac{p+a}{p^2+b^2} \quad F(p) = \frac{p^3}{p^4-a^4} \quad F(p) = \frac{1}{p^2 \sinh(pa)} .$$

Exercice 5 : Résoudre, en utilisant la Transformée de Laplace, les équations différentielles suivantes

$$\begin{cases} y'' - y' - 6y = 2 \\ y(0) = 1 \quad y'(0) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} ty'' + 2y' + ty = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Exercice 6 : Résoudre, en utilisant la Transformée de Laplace, les équations intégrales ou intégro-différentielles suivantes

$$\begin{cases} 3y(t) + y'(t) + 2 \int_0^t y(s) ds = \varphi(t) \\ y(0) = 0. \end{cases} \quad \begin{cases} f(t) - \int_0^t J_0(t-u)f(u) du = Y(t) \\ f(0) \text{ donné.} \end{cases}$$

Exercice 7 : Résoudre, en utilisant la Transformée de Laplace, l'équation aux dérivées partielles (qui modélise le déplacement d'une corde attachée à l'une de ses extrémités et soumise à une force de traction F_0 à l'autre extrémité)

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0 \quad (t > 0, x \in]0, L[) \\ f(0, x) = 0 \quad \frac{\partial f}{\partial t}(0, x) = 0 \\ f(t, 0) = 0 \quad \frac{\partial f}{\partial x}(t, L) = F_0 \end{array} \right.$$

Annexe A

Éléments de topologie

Dans cette annexe, je (re)donne les définitions des objets topologiques qui sont manipulés dans ce cours. Quand je l'estime utile, je donne aussi quelques commentaires en caractères plus petits. Tous les ensembles considérés sont des sous-ensembles de \mathbb{C} .

Ouvert *Un sous-ensemble Ω du plan complexe est ouvert si, pour tout point $z_0 \in \Omega$, il existe un nombre $r > 0$ tel que le disque $D(z_0, r)$ centré en z_0 et de rayon r soit inclus dans Ω .*

Cela généralise la notion d'intervalle ouvert sur \mathbb{R} . La différence est que dans \mathbb{C} , un ouvert peut avoir une forme très compliquée.

Fermé *Un sous-ensemble F du plan complexe est fermé si son complémentaire est ouvert. On utilise souvent une caractérisation des fermés qui utilise les suites : un ensemble F est fermé si pour toute suite de points z_n de F qui converge vers un point z , on a $z \in F$.*

Intérieur *L'intérieur d'un ensemble A est le plus grand ouvert contenu dans A . On le note $\overset{\circ}{A}$.*

Fermeture (ou adhérence) *La fermeture d'un ensemble A est le plus petit fermé qui contient A . On la note \overline{A} .*

La fermeture est aussi l'ensemble de toutes les limites de suites d'éléments de A .

Frontière (ou bord) *La frontière d'un ensemble A est la différence, au sens des ensembles, entre sa fermeture et son intérieur. On la note ∂A .*

Ainsi la frontière d'un ouvert Ω est l'ensemble des points qui sont dans sa fermeture $\overline{\Omega}$ sans être dans Ω .

Compact *Un sous-ensemble K du plan complexe est compact si il est à la fois fermé et borné (c'est-à-dire inclus dans une boule).*

Les compacts sont très précieux en analyse :

- de toute suite de points d'un compact, on peut extraire une sous-suite convergente
- Une fonction continue (voir ci-dessous) sur un compact K et à valeurs dans \mathbb{R} atteint son maximum et son minimum sur K

Fonction continue Une fonction f de \mathbb{C} dans \mathbb{C} est continue si l'image réciproque par f de tout ouvert de \mathbb{C} est un ouvert de \mathbb{C} .

Il est plus traditionnel de définir la continuité en utilisant les limites et la notion de continuité en un point : f est continue en z_0 si $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$ et f est continue sur \mathbb{C} , si elle est continue en tout point de \mathbb{C} . On peut, bien sûr, aussi définir la continuité d'une fonction de \mathbb{C} dans \mathbb{R} ou de \mathbb{C} dans \mathbb{C} dans n'importe quel ensemble muni d'une topologie (c'est-à-dire d'une notion d'ouverts).

Homéomorphisme Une fonction f est un homéomorphisme d'une partie A de \mathbb{C} sur une partie B de \mathbb{C} si

- f est une bijection de A sur B
- f est continue sur A
- f^{-1} (la bijection réciproque de f) est continue sur B .

On dit que deux parties A et B sont homéomorphes s'il existe un homéomorphisme f de A sur B .

Intuitivement, si deux parties sont homéomorphes, on peut passer continûment de l'une à l'autre par une déformation.

Connexe Un ouvert Ω du plan complexe est connexe s'il n'est pas possible d'écrire Ω comme réunion de deux ouverts disjoints Ω_1 et Ω_2 .

Intuitivement, un ensemble connexe est fait d'un seul morceau. Une caractérisation plus parlante : un ouvert Ω est connexe si deux points quelconques de Ω peuvent toujours être joints par un chemin qui reste dans Ω .

On utilise souvent la propriété suivante : si $A \subset \Omega$ est à la fois ouvert et fermé dans Ω connexe, alors $A = \Omega$.

On peut définir la connexité d'ensembles plus généraux que les ouverts, mais il faut parler en terme de topologie induite et remplacer dans la définition ci-dessus *ouverts disjoints* par *ouverts (relativement à Ω) disjoints*.

Composante connexe Dans un ensemble A , la composante connexe du point z_0 est la plus grande partie connexe de A contenant z_0 .

Être connexe est donc équivalent à avoir une seule composante connexe.