Corrigé du Test n° 1 (sujet B)

Exercice 1 : 1) On va utiliser la formule $|\text{Erreur}| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \prod_{i=0}^{n} |x - x_i|$

a) avec les deux points 2 et 2,5 : $n = 1$ $x_0 = 2$, $x_1 = 2,5$. Comme $f''(x) = -\frac{1}{x}$
on a $M_2 = 1/2^2 = 1/4$ et $|\text{Erreur}| \leq \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} \times 0.2 \times 0.3 = 0.0075$

b) $n = 2$ $x_0 = 1.5$, $x_1 = 2$; $x_2 = 2.5$; $M_3 = 2/1.5^3$; $|\text{Err}| \leq \frac{2}{1.5^3} \frac{1}{6}\, 0.7 \times 0.2 \times 0.3 = 0.00$

c) $n = 3$ $x_0 = 1.5$, $x_1 = 2$, $x_2 = 2.5$, $x_3 = 3$; $M_4 = 6/1.5^4$; $|\text{Err}| \leq \frac{6}{1.5^4} \frac{1}{24}\, 0.7 \times 0.2 \times 0.3 \times 0.8 = 0.0017$

2) avec la fonction du TD 2, on obtient
sur 2 points 0.7824 ; sur 3 points 0.7901 ; sur 4 points 0.7888
ce qui est parfaitement en accord avec la question précédente.

Exercice 2 :

$0 = x_0$ $\quad x_i \; x_{i+1}$ $\quad x_{N+1} = 1$

on note $x_{i+1} - x_i = h$ le pas constant et $y_1, y_2, \dots, y_{N+1}$? inconnues : $y_i \simeq y(x_i)$
(on rajoute ici y_{N+1} car la valeur de y n'est pas connue en x_{N+1} et on a $y_0 = -1$).

1) Pour les points intérieurs $1 \leq i \leq N$, on a

$$-\frac{y_{i+1} + y_{i-1} - 2y_i}{h^2} + x_i \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} - y_i = \cos x_i$$

La relation $y'(1) = 1$ va se lire $\frac{y_{N+1} - y_N}{h} = 1$ soit $y_{N+1} = y_N + h$ ce qui conduit finalement au système

$$\begin{bmatrix} 2-h^2 & \frac{h}{2}x_1 - 1 & & & 0 \\ -\frac{h}{2}x_2 - 1 & 2-h^2 & \frac{h}{2}x_2 - 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & & -\frac{h}{2}x_{N-1} - 1 & 2-h^2 & \frac{h}{2}x_{N-1} - 1 \\ & & & -\frac{h}{2}x_N - 1 & \left(2 - h^2 + \frac{h}{2}x_N - 1\right) \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} h^2 \cos x_1 - \frac{h}{2}x_1 - 1 \\ h^2 \cos x_2 \\ \vdots \\ h^2 \cos x_i \\ \vdots \\ h^2 \cos x_N + h\left(\frac{h}{2}x_N - 1\right) \end{bmatrix}$$

(la 1ère ligne et la dernière ligne sont impactées par $y_0 = -1$ et $y_{N+1} = y_N + h$)

2)
```
function Y_ exo2_corrige (h
    x = h:h:1 ; n = length(x) ; a = (2-h^2)*ones(1,n) ; a(n)=a(n)+h/2*x(n)-1 ;
    b = h/2*x(1:n-1)-1 ; c = -h/2*x(2:n)-1 ; f=h^2*cos(x) ; f(n)=f(n)+h*(h/2*x(n)
    A = diag(a) + diag(b,1) + diag(c,-1)
    Y = A\f' ; plot(x,Y)
```

Exercice 3 :

1) pour n impair, $I_n = 0$ car la fonction $x^n \ln|x|$ est impaire

pour n pair $I_n = 2\int_0^1 x^n \ln|x| = 2 \left.\frac{x^{n+1}}{n+1}\ln|x|\right|_0^1 - 2\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{n+1}\frac{1}{x}dx$ (intégration par parties)

soit $I_n = -2/(n+1)^2$ pour n pair

2) On obtient $P_0 = 1$, $P_1 = X$, $P_2 = X^2 - 1/9$; $P_3 = X^3 - \frac{9}{25}X$

les racines de P_3 sont $-3/5, 0, 3/5$

3) On calcule A_0, A_1, A_2 par les formules (3.53) du poly, on obtient

$A_0 = \frac{25}{18}\left(I_2 - \frac{3}{5}I_1\right) = -\frac{25}{81}$, $A_1 = -\frac{25}{9}\left(I_2 - \frac{9}{25}I_0\right) = -\frac{112}{81}$, $A_2 = -\frac{25}{81}$

On a alors la formule d'intégration :

$$\int_{-1}^{+1} f(x)\ln|x|\,dx = -\frac{1}{81}\left[25 f\left(-\tfrac{3}{5}\right) + 112 f(0) + 25 f\left(\tfrac{3}{5}\right)\right]$$

et cette formule est d'ordre 5 d'après le cours

Exercice 4 :

1) Euler explicite $y_{n+1} = y_n - h y_n^2$, $y_0 = 1$

Euler implicite $y_{n+1} = y_n - h y_{n+1}^2$ $(y_0 = 1)$. Comme il s'agit d'une équation du 2nd degré en y_{n+1}, on résout aisément : $y_{n+1} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4hy_n}}{2h}$ et on garde la solution qui est proche de y_n quand $h \to 0$, soit

$$y_{n+1} = \left(\sqrt{1+4hy_n} - 1\right)/2h = 2y_n / \left(1 + \sqrt{1+4hy_n}\right) \quad \text{(formule plus stable)}$$

2)
```
function [Yimp, Yexp] = exo4_corrige(h,T)
   t = 0:h:T; n = length(t); Yimp = ones(1,n); Yexp = ones(1,n);
   for k=1:n-1
       Yimp(k+1) = Yimp(k) - h*Yimp(k)^2;
       Yexp(k+1) = (2* Yexp(k))/(1+sqrt(1+4*h*Yexp(k)));
   end
   plot(t, Yimp, t, Yexp)
```

3) Equation à variables séparables : $-\frac{dy}{y^2} = dt \Rightarrow \frac{1}{y} = t + c_0 \Rightarrow y(t) = \frac{1}{t+1}$ en tenant compte de y_0

On a immédiatement $0 \leq y(t) \leq 1$

4) Explicite : si $h \leq 1$ on a facilement $0 \leq y_n \leq 1$ par récurrence puisque $hy_n^2 \leq y_n$ donc $0 \leq y_{n+1} \leq y_n \leq 1$. En revanche si $h > 1$ $y_1 = 1 - h < 0$, donc on ne peut avoir $0 \leq y_n \leq 1$ pour tout n si et seul si $h \leq 1$

Implicite : Là aussi par récurrence si $y_n \geq 0$ $y_{n+1} \geq 0$ par la formule du 1)

et si $y_n \leq 1$ $y_{n+1} = \frac{2y_n}{1+\sqrt{1+4hy_n}} \leq \frac{2}{1+\sqrt{1}} = 1$ pour tout $h \geq 0$