Ecole des Mines de Nancy
2017-2018
Mathématiques

Analyse numérique: Test 1 - sujet A: corrigé

Exercice 1: (pour le sujet B changer partout x en $-x$)

La table ci-contre donne trois valeurs d'une fonction f inconnue.

x	$f(x)$
$x_0 = -1$	0
$x_1 = 0$	-1
$x_2 = 2$	9

sur 1,5 pt 1) On a immédiatement $f[x_0] = 0$; $f[x_0, x_1] = -1$; $f[x_0, x_1, x_2] = 2$ et le polynôme d'interpolation de degré 2 $P_2(x) = 2x^2 + x - 1$.
sur 1 pt 2) On en déduit $f(1) = 2$ et l'erreur commise est majorée par $M_3|\pi_3(1)|/3! = M_3/3$.
sur 1,5 pt 3) On considère les deux fonctions suivantes:

$$f_1(x) = \frac{1}{2}\,x^3 + \frac{3}{2}\,x^2 - 1 \quad \text{et} \quad f_2(x) = -x^4 - 3x^3 + 8x^2 + 9x - 1\,.$$

Ces fonctions passent par les mêmes trois points que f. On a $f_1(1) = 1$ et $f_2(1) = 12$. C'est parfaitement en accord avec la formule d'erreur trouvée à la question 2 car $M_3 = 3$ pour la fonction f_1 tandis que $M_3 = 42$ pour la fonction f_2.
sur 1 pt 4) graphique des fonctions P_2, f_1, f_2 sur l'intervalle $[-2, 3]$.

Exercice 2:
sur 1 pt 1) On a $I_{2n+1} = 0$ par imparité de la fonction et $I_{2n} = 2n(2n-1)I_{2n-2}$ par une intégration par parties. On en déduit $I_1 = I_3 = I_5 = 0$ et $I_0 = 2, I_2 = 4, I_4 = 48, I_6 = 1440$.
sur 1,5 pt 2) On obtient $Q_0 = 1$, $Q_1(x) = x$, $Q_2(x) = x^2 - 2$, $Q_3(x) = x^3 - 12x$. Les racines du polynôme Q_3 sont $x_0 = -\sqrt{12}, x_1 = 0, x_2 = \sqrt{12}$.
sur 1.5 pt 3) Il faut calculer les coefficients A_i de la formule (3.53). On obtient $A_0 = I_2/24 = 1/6$, $A_1 = -I_2/12 + 1 = 2/3$, $A_2 = I_2/24 = 1/6$. On a donc comme méthode

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-|x|}\,dx \simeq f(-\sqrt{12})/6 + 2f(0)/3 + f(\sqrt{12})/6.$$

Cette méthode est d'ordre 5 comme le dit le cours
sur 1.5 pt 4) On peut choisir comme fonctions x^4 et x^5 pour vérifier que la méthode marche bien et x^6 pour constater qu'elle n'est pas d'ordre 6. On peut aussi choisir $f(x) = e^{-|x|}$ pour laquelle on obtient 0.67 au lieu de 1, ce qui n'est pas fameux.

Exercice 3:
On considère l'équation différentielle

$$\begin{cases} -y''(x) + \cos(x)\,y(x) = x^2 \\ \quad y(0) = 0 \quad y(1) = 0. \end{cases} \tag{1}$$

sur 1.5 pt 1) voir poly page 55, ici les conditions au bord sont "transparentes" au sens où on ne les voit pas vraiment apparaitre dans l'équation.
sur 1.5 pt 2) voir TD n°3 c'est le même genre de système.
sur 3 pts 3) (pour le sujet B adapter) On change maintenant les conditions aux limites en choisissant $y'(0) = 0$ et $y(1) = 2$. La condition $y'(0) = 0$ va se traduire par $y_0 = y_1$ et donc la première ligne de la matrice va s'écrire maintenant $1/h^2 - cos(h) \;\; -1/h^2 \;\; 0...$ au lieu de

$2/h^2 - cos(h) \;\; -1/h^2 \; 0...$, tandis que le vecteur du second membre verra sa dernière composante changée en $(1-h)^2 + 2/h^2$.

Exercice 4:
On considère l'équation différentielle

$$\left\{ \begin{array}{l} y'(t) = e^{-ty(t)} \\ y(0) = 0\ . \end{array} \right. \tag{2}$$

sur 2 pt 1) Le (ii) du Théorème 4.1 page 75 s'applique pour montrer que (2) une unique solution sur un petit intervalle de temps $[0, \tau)$. Le Théorème 4.2 avec $L = 0$ s'applique pour montrer qu'il existe une unique solution définie pour tout $t \geq 0$.
sur 2 pt 2) Comme $y' \geq 0$, y est croissante et $y(t) \geq y(1) > 0$ pour $t \geq 1$. On en déduit que pour $t \geq 1$, $y'(t) \leq e^{-ty(1)}$ puis par intégration que pour $t \geq 1$

$$y(t) \leq y(1) + \int_1^t e^{-sy(1)}\, ds = y(1) + (e^{-y(1)} - e^{-ty(1)})/y(1) \leq y(1) + e^{-y(1)}/y(1)$$

ce qui montre que $y(t)$ est bornée sur $\mathbb{R}_+$. Comme elle est croissante, elle admet une limite en $+\infty$.
sur 1,5 pt 3) On programme la méthode d'Euler explicite et on peut mettre comme test d'arrêt $|y_{n+1} - y_n| \leq \varepsilon$. On trouve une limite d'environ 1.136.