Ecole des Mines de Nancy
2018-2019
Mathématiques

Corrigé du Test 1 d'Analyse numérique

Exercice 1:
On veut calculer $\int_0^1 \exp(x^2)\,dx$ par la méthode des points milieux.
sur 1pt 1) Soit $f(x) = \exp(x^2)$. La formule d'erreur conduit à calculer $M_2 = max|f''|$ sur $[0,1]$ ou $[0,2]$. Comme $f''(x) = (2+4x^2)\exp(x^2)$ qui est clairement une fonction croissante, on a $M_2 = f''(1) = 6e$ dans le premier cas ou $M_2 = f''(2) = 18e^2$ dans le 2ème cas. En utilisant alors la formule d'erreur page 64 du poly, on voit qu'il faut choisir h tel que $h \leq \sqrt{\frac{24}{M_2(b-a)}10^{-4}}$ puis on prend $n = (b-a)/h$ ce qui conduit à 8244 points pour le sujet A et 66584 pour le sujet B.
sur 1,5 pt 2)

```
function [j1]=exo1_Henrot(n)
h=1/n;
x=h/2:h:1;
y=exp(x.^2);
j1=h*sum(y);
y1=cos(x1.^2);
y1(1)=y1(1)/2;y1(end)=y1(end)/2;
end
```

On doit trouver $j1 = 1.46265174$ pour le sujet A et $j1 = 16.45262776$ pour le sujet B.
3) **sur 1,5 pt** a)On constate que la formule est exacte pour les polynômes $1, x, x^2, x^3$ mais inexacte pour x^4. La formule est donc d'ordre 3.
sur 1,5 + 1,5=3 pt b) On obtient, par changement de variable $x = \frac{y+2i+1}{2m}$:

$$\int_{\frac{i}{m}}^{\frac{i+1}{m}} f(x)dx = \frac{1}{2m}\int_{-1}^{1} f\left(\frac{y+2i+1}{2m}\right) dy.$$

D'où en utilisant la formule (1)

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \frac{1}{2m}\sum_{i=0}^{m-1} f\left(\frac{-\frac{1}{\sqrt{3}}+2i+1}{2m}\right) + f\left(\frac{-\frac{1}{\sqrt{3}}+2i+1}{2m}\right).$$

Cela peut s'écrire en Matlab

```
function [j2]=exo1b_Henrot(m)
k=0:m-1;
q=1/sqrt(3);
x2=(2*k+1-q)/(2*m);x3=(2*k+1+q)/(2*m);
y2=f(x2);y3=f(x3);
j2=(sum(y2)+sum(y3))/(2*m);
end
```

et on doit trouver la même chose qu'à la question 1 (à 10^{-8} près) avec m=40.

Exercice 2:
sur 1,5 pt 1) Les différences divisées qui nous intéressent étant successivement $2, -1, 1$, le

polynôme d'interpolation P_2 de f sur les points équidistants $x_0 = -1, x_1 = 0, x_2 = 1$ est $P_2(x) = 2 - (x+1) + (x+1)x = x^2 + 1$.
. **sur 2 pt** 2) En dressant le tableau de variation de la fonction $x^4 - x^2$, on voit que cette fonction est négative et le maximum de sa valeur absolue, atteint en $1/\sqrt{2}$ vaut $\|f - P_2\|_\infty = 1/4$. C'est bien en accord avec la formule théorique, quoique nettement plus petit, car la formule donnerait

$$\|f - P_2\|_\infty \leq \frac{M_3}{6} \max |(x+1)x(x-1)|$$

où $M_3 = 24$ et $\max |(x+1)x(x-1)| = 2/3\sqrt{3}$, ce qui donne environ 1.54.
sur 2,5 pt 3) On exprime ici que le polynôme R_2, qu'on peut chercher sous la forme $R_2(x) = cx^2 + bx + a$ est tel que $f - R_2$ est orthogonal à $1, x, x^2$. Cela conduit au système linéaire

$$\left\{\begin{array}{l} \int_{-1}^1 R_2(x)dx = \int_{-1}^1 f(x)dx \\ \int_{-1}^1 xR_2(x)dx = \int_{-1}^1 xf(x)dx \\ \int_{-1}^1 x^2R_2(x)dx = \int_{-1}^1 x^2f(x)dx \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} 2a + \frac{2}{3}c & = & 2 + \frac{2}{5} \\ \frac{2}{3}b & = & 0 \\ \frac{2}{3}a + \frac{2}{5}c & = & \frac{2}{3} + \frac{2}{7} \end{array}\right.$$

et fournit $a = 6/5, b = 0, c = 6/7$. (à noter qu'on peut aussi travailler avec les polynômes de Legendre qui rendent les calculs plus simples). On obtient $\|f - R_2\|_\infty = 94/245$.
sur 1 pt 4) On utilise par exemple la commande

```
x=-1:0.001:1;
P2=@(x) x^2+1;
R2=@(x) 6*x.^2/7+6/5;
plot(x,f(x),x,P2(x),x,R2(x))
```

Exercice 3:
sur 2,5 pt 1) Voici les différences dues aux nouvelles conditions au bord:

- puisque $y(0) = 1$, l'égalité écrite au point $x_1 = h$ est:

$$-\frac{y_2 - 2y_1 + 1}{h^2} + x_1y_1 = cos(x_1)$$

  et ainsi un terme $1/h^2$ viendra dans le second membre pour la 1ère ligne du système.

- la condition $y'(1) = 0$ ne peut se traduire que par $(y_{N+1} - y_N)/h = 0$ ou encore $y_N = y_{N+1}$. Ainsi la dernière équation au point x_N s'écrit

$$-\frac{y_N - 2y_N + y_{N-1}}{h^2} + x_Ny_N = cos(x_N)$$

  Ainsi, le dernier terme sur la diagonale est $1/h^2 + x_N$ et non $2/h^2 + x_N$.

Le système à résoudre s'écrit donc $AY = b$ où la matrice A et le second membre b sont donnés par

$$A = \begin{pmatrix} x_1 + \frac{2}{h^2} & -\frac{1}{h^2} & 0 & \cdots & 0 \\ -\frac{1}{h^2} & x_2 + \frac{2}{h^2} & -\frac{1}{h^2} & \ddots & \vdots \\ 0 & -\frac{1}{h^2} & x_3 + \frac{2}{h^2} & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -\frac{1}{h^2} \\ 0 & \cdots & 0 & -\frac{1}{h^2} & x_N + \frac{1}{h^2} \end{pmatrix} \tag{1}$$

$$b = \begin{pmatrix} \cos(x_1) + \left(\frac{1}{h^2}\right) \\ \cos(x_2) \\ \vdots \\ \vdots \\ \cos(x_{N-1}) \\ \cos(x_N) \end{pmatrix} \tag{2}$$

sur 1,5 pt 2) On peut écrire le programme suivant

```
function Y=exo3_Henrot(n);
h=1/(n+1);
X=0:h:1;
Xint=X(2:n+1);
C=cos(Xint);
A=diag(2/(h^2)+Xint)+diag(-1/(h^2),1)+...
diag(-1/(h^2),-1);
A(n,n)=1:h^2+(1-h);
C(1)=C(1)+1/h^2;
Yint=(A\C)';
Y=[0, Yint, 0];
close all
plot(X,Y,'-b')
end
```

Exercice 4:

sur 1,5 pt 1) A-t-on existence locale de la solution? Unicité? Existence globale? Pouvez-vous trouver la solution exacte?

sur 1,5 pt 2) Écrire et programmer la méthode d'Euler explicite avec un pas constant h. A l'aide d'une boucle *while*, on écrira une fonction Matlab qui s'arrête lorsque y_n dépasse 10^6.

3) On veut maintenant programmer la méthode d'Euler implicite.

sur 1,5 pt a) Peut-on choisir n'importe quel pas h_n si on veut résoudre l'équation du second degré permettant de calculer y_{n+1}?

sur 1,5 pt b) On choisit un pas h_n lié à y_n par $h_n = \frac{1}{8y_n}$. Programmer la méthode d'Euler implicite (avec la même boucle while pour que le programme s'arrête lorsque y_n dépasse 10^6). Comparer les deux méthodes d'Euler sur cet exemple.