# Corrigé du Test 1-sujet A

cours Analyse numérique
Antoine Henrot

lundi 31 octobre 2016

## 1 Exercice 1

### 1.1

#### 1.1.1 a

$$f(x) = \exp(\sin(x))$$

$$f'(x) = \exp(\sin(x))\ \cos(x)$$

$$f"(x) = \exp(\sin(x))\ \left[\cos^2(x) - \sin(x)\right]$$

$$f^{(3)}(x) = \exp(\sin(x))\ \cos(x)\ \left[\cos^2(x) - 3\ \sin(x) - 1\right]$$

#### 1.1.2 b

On peut réécrire $f^{(3)}(x)$ sous la forme

$$f^{(3)}(x) = -\ \exp(\sin(x))\ \cos(x)\ \sin(x)\,(\sin(x) + 3)$$

$f^{(3)}(x)$ est négative sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ et positive sur $[\frac{\pi}{2}, \pi]$.
Par conséquent $f"(x)$ a un minimum global en $\frac{\pi}{2}$ de valeur $-\exp(1)$ et deux maximum locaux en 0 et $\pi$ de valeur 1. On en déduit

$$M_2 = \max_{x \in [0,\pi]} |f''(x)| = \exp(1)$$

## 1.2

L'erreur pour la méthode des points milieux sur un intervalle $[a, b]$ avec un pas constant $h$ est majorée par

$$\frac{M_2}{24} h^2 (b - a)$$

Pour $n$ points on a $h = \pi/n$ et on veut donc

$$\frac{\exp(1)}{24} \frac{\pi^2}{n^2} \pi \leq 10^{-8}$$

Soit

$$n^2 \geq 10^8 \frac{\exp(1) \pi^3}{24}$$

i.e., $n \geq 18740$.

## 1.3

```
function y=exo1_henrot(n)
h=pi/n; X=0:h:pi; PM=X(1:end-1)+h/2;
y=h*sum(exp(sin(PM)));
end
```

Ce qui donne dans la fenêtre de commande

```
>> y=exo1_henrot(18740)

y =

   6.2088
```

(et $y = 3.9775$ avec le même nombre de points dans le test B).

# 2 Exercice 2

## 2.1

En suivant la démarche du cours (polycopié pages 31-32), on voit qu'on doit trouver le vecteur $aU+bX_2$ qui soit le plus proche du vecteur $Y$. Il s'agit donc de trouver la projection orthogonale de $Y$ sur le plan engendré par $U$ et $X_2$ ce qui conduit au système ($(V,W)$ désigne le produit scalaire de $V$ et $W$)

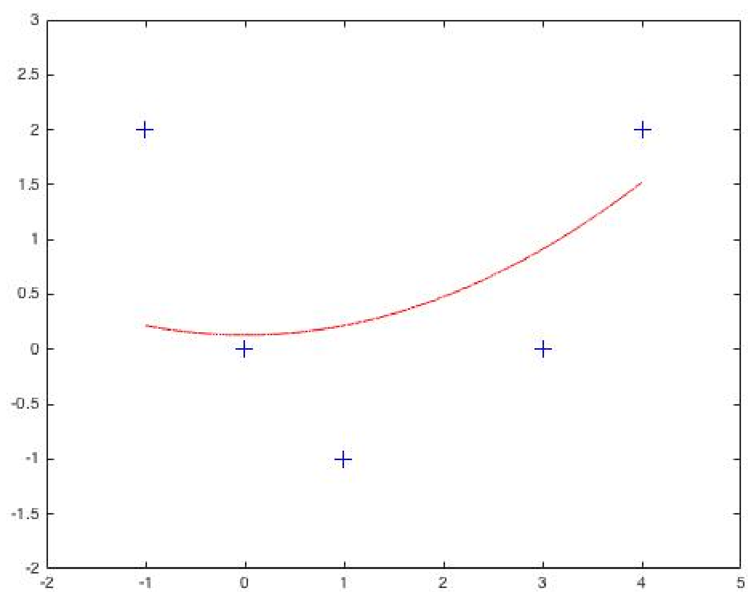
$$\left\{\begin{array}{rcl} a(U,U)+b(U,X_2) & = & (U,Y) \\ a(X_2,U)+b(X_2,X_2) & = & (X_2,Y) \end{array}\right.$$

## 2.2

```
function [a,b]=exo2_henrot(X,Y)
n=length(X);U=ones(n,1);
X2=X.^2;
M=[U'*U U'*X2;U'*X2 X2'*X2];
sec=[U'*Y;X2'*Y];
sol=M \sec;
a=sol(1);b=sol(2);
clf
plot(X,Y,'+b','MarkerSize',10)
hold on
z=min(X):0.01:max(X);
plot(z,a+b*z.^2,'-r')
end
```

Ce qui donne pour le sujet A ( analogue pour sujet B)

```
>> X=[-1;0;1;3;4];Y=[2;0;-1;0;2];
>> [a,b]=exo2_henrot(X,Y);
>> a

a =

    0.1304

>> b

b =

    0.0870

>> xlim([-2,5]);  ylim([-2,3]):
```



# 3 Exercice 3

## 3.1

Comme les points sont équidistants on peut soit revenir à la définition, soit utiliser les différences finies. Si on revient à la définition, je conseille de présenter les calculs en tableau comme en bas de la page 25.
On obtient

$$f[x_{i-2}, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, x_{i+2}] = \frac{1}{24\,h^4}\,(f_{i+2} - 4\,f_{i+1} + 6\,f_i - 4\,f_{i-1} + \,f_{i-2})$$

## 3.2

Si on remplace $f$ par son polynôme d'interpolation $P_4$ de degré 4 calculé sur les 5 points $x_{i-2}, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, x_{i+2}$, une approximation de $f^{(4)}(x_i)$ sera donnée par $P_4^{(4)}(x_i)$ qui n'est autre que 24 fois le coefficient du terme de plus haut degré, donc

$$f^{(4)}(x_i) \simeq \frac{1}{h^4}\,(f_{i+2} - 4\,f_{i+1} + 6\,f_i - 4\,f_{i-1} + \,f_{i-2})$$

## 3.3

La matrice $A$ utilise la formule d'approximation de la dérivée quatrième trouvée à la question précédente.
On essaie donc de résoudre

$$\frac{d^4\,u}{dx^4} = G(x)$$

avec les conditions aux bords $u(0) = 1$, $u'(0) = 0$, $u(1) = -1$ et $u'(1) = 0$. On applique la formule aux points intérieurs $X(3 : n-2)$. Les conditions aux bords font que $x_1 = x_2 = 1$ et $x_{n-1} = x_n = -1$ On doit donc corriger le second membre $G(x)$. Voir page 55 du cours.
La matrice $A$ est donc de dimension $(n-4)\times(n-4)$. On introduit la matrice avec des 6 sur la diagonale principale, des $-4$ sur les diagonales 1 et $-1$ (notation MATLAB) et des 1 sur les diagonales 2 et $-2$. Le vecteur diagonal est dimension $n-4$, les vecteurs des diagonales 1 et $-1$ de dimensions $n-5$,

les vecteurs des diagonales 2 et $-2$ de de dimensions $n-6$ et non $n-5$ dans le code.
Il faut remplacer `diag(1/u*ones(1,n-5),2)+diag(1/u*ones(1,n-5),-2)` par

```
diag(1/u*ones(1,n-6),2)+diag(1/u*ones(1,n-6),-2)
```

Le vecteur `X` est de dimension `n+1`. Pour obtenir les points intérieurs", c'est à dire moins les deux points au début et les deux à la fin, il faut commencer à l'indice 3 et finir à l'indice $n-1 = n+1-2$. On aurait pu utiliser la notation `end`
Il faut remplacer `Xint` par

`Xint=X(3:n-1)` ou encore de façon équivalente `Xint=X(3:end-2)`. ou bien alternativement compléter `Xint` en posant `X=[0 h Xint 1-h 1]` et tracer par `plot(X,Y)`

# 4 Exercice 4

## 4.1

$$\begin{cases} y''(t) = & \sin y(t) \\ \\ y(0) = 1, & y('0) = 1 \end{cases}$$

On pose $y_1 = y$ et $y_2 = y'$ ce qui donne

$$\begin{cases} y_1'(t) = & y_2(t) \\ \\ y_2'(t) = & \sin(y_1(t)) \\ \\ y_1(0) = 1, & y_2(0) = 0 \end{cases}$$

soit

$$Y(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} \quad F(t, Y(t)) = \begin{bmatrix} y_2(t) \\ \sin y_1(t) \end{bmatrix}$$

## 4.2

Étudions la fonction $F$ définie par

$$F : (x, y) \longmapsto (y, \sin(x))$$

$$F(x_1, y_1) - F(x_0, y_0) = \begin{bmatrix} y_1 - y_0 \\ \sin x_1 - \sin x_0 \end{bmatrix}$$

$$\|F(x_1, y_1) - F(x_0, y_0)\|^2 = (y_1 - y_0)^2 + (\sin x_1 - \sin x_0)^2$$

$$\sin x_1 - \sin x_0 = 2\,\cos\left[\frac{(x_1 + x_0)}{2}\right]\,\sin\left[\frac{(x_1 - x_0)}{2}\right]$$

En tenant compte de l'inégalité $|\sin(x)| \leq |x|$ pour tout $x$ on a, en majorant le cos par 1 :

$$|\sin x_1 - \sin x_0| \leq |x_1 - x_0|$$

En définitive

$$\|F(X_1) - F(X_0)\|^2 \leq \|X_1 - X_0\|^2$$

où $X_0 = (x_0, y_0)$ et $X_1 = (x_1, y_1)$.
Ceci prouve que la fonction $F$ est globalement Lipschitzienne de rapport 1. Par le Théorème de Cauchy-Lipschitz la solution existe, est globale et est unique.

## 4.3

On a

$$y'\,y" = \sin(y)\,y'$$

En intégrant on obtient

$$\frac{1}{2}\,y'^2 = -\cos(y) + C$$

où $C$ est une constante. En regardant cette relation en $t = 0$ on obtient $C = \cos 1$.
D'où

$$y'^2(t) = 2\,(\cos 1 - \cos y(t))$$

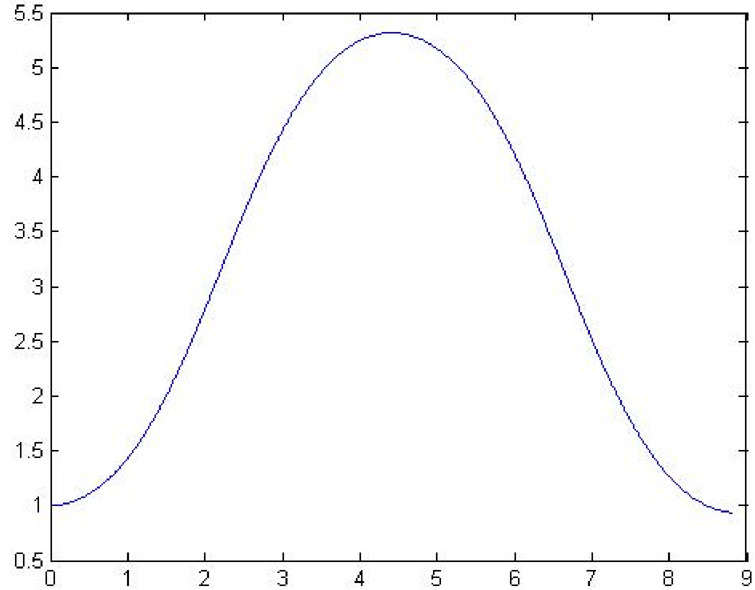
## 4.4

S'il existe $T$ tel que $y(T) = 1$ alors d'après la relation de la question précédente, nécessairement $y'(T) = 0$. La solution du deuxième système repasse par le point $(1, 0)$ au temps $T$. Par unicité de la solution la solution est périodique. En effet posons $z(t) = y(t + T)$. Les deux fonctions $z(t)$ et $y(t)$ vérifient exactement la même équation différentielle, avec les mêmes données initiales. Par unicité elles sont donc égales, soit $y(t + T) = y(t)$ pour tout $t$ ce qui prouve la périodicité.

## 4.5

```
function [T,X]=exo4_henrot(y0,tf,N)
% y0 est le vecteur (colonne) des conditions initiales, tf
% le temps final qu'on cherche à atteindre et N le nombre
% de pas de temps
h=tf/N;
T=linspace(0,tf,N+1);
T=T(:);
X=zeros(2,N); X(:,1)=y0;
    for i=1:N
        s1=[X(2,i);sin(X(1,i))];
        X(:,i+1)=X(:,i)+h*s1;
    end
end
```

Quand on exécute cette fonction, il semble bien que pour $T$ entre 8.5 et 9, la courbe repasse par $y(T) = 1$.


5.5
5
4.5
4
3.5
3
2.5
2
1.5
1
0.5
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9