Corrigé et Barème

Exercice 1

1) On introduit $F : \mathbb{R}\times\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ de sorte que l'éq. différentielle s'écrit

1 $(t, Y) \longmapsto \begin{pmatrix} y_2 \\ y_2 - t y_1 + 1 \end{pmatrix}$ $\quad \begin{cases} Y'(t) = F(t, Y(t)) \\ Y(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{cases}$

2) Si on applique la formule (5.9)

$K_1^a = h\begin{pmatrix} 1 \\ 1+1 \end{pmatrix}$; $K_2^a = h\begin{pmatrix} 1+2h \\ 1+2h - h\,h + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h+2h^2 \\ 2h+2h^2 - h^3 \end{pmatrix}$

$Y_0 + K_1^a = \begin{pmatrix} h \\ 1+2h \end{pmatrix}$

2 d'où $Y_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} h + h + 2h^2 \\ 2h + 2h + 2h^2 - h^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h+h^2 \\ 1+2h+h^2 - h^3/2 \end{pmatrix}$

(Remarque : si on utilise la formule (5.10) on obtient

$Y_1 = \begin{pmatrix} h+h^2 \\ 1+2h+h^2 - h^3/4 \end{pmatrix}$ sujet B : $Y_1 = \begin{pmatrix} -h \\ -1 - h^2/2 \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} -h \\ -1 - h^3/4 \end{pmatrix}$

3) Matlab

2,5

<u>Note</u> : Si un élève se trompe dans la fonction F du 1), évidemment tout le reste est faux. Corrigez néanmoins ses questions 2 et 3 avec son propre F

Exercice 2

1) Le plus simple est d'utiliser le théorème 7.4 p. 139 du poly

1,5 $\rightarrow$ la matrice A_n est à dominante diagonale car $4 > |1| + |1|$

2,5 2) Matlab

3) Si on utilise le Lemme 7.3 (Hadamard - Gershgörin), on voit que les valeurs propres sont situées dans les disques $D(4,1) \cup D(4,2) = D(4,2)$

2 donc elles sont toutes réelles (car la matrice est symétrique) et comprises entre 2 et 6. Conséquence : la matrice est définie positive et

$$\mathrm{cond}_2(A) = \frac{\max|\lambda_k|}{\min|\lambda_k|} \le \frac{6}{2} = 3$$

Exercice 3

1 1) s'il converge, c'est vers x^* tel que $x^* = \frac{3}{4}x^* + \frac{b}{x^{*3}}$

$\iff \quad x^* = (4b)^{1/4} \quad \left(x^* = (3a)^{1/3} \text{ pour le sujet } b \right)$

1,5 2) D'après le Théorème 8.1 p. 157, l'algorithme converge si $|g'(x^*)| < 1$ et x_0 proche de x^*. Or $g'(x^*) = \frac{3}{4} - \frac{3b}{x^{*4}} = 0$ donc oui ça va converger.

1,5 3) Pour $b = 7$ $\quad g'(x) = \frac{3}{4} - \frac{21}{x^4} < \frac{3}{4} \quad \forall x$

et $g'(x) > -1 \iff x^4 > 12$ donc $|g'(x)| \leq \frac{9}{16}$

donc ça va converger sur $[2, +\infty[$ $\left(\frac{8}{27} \text{ sujet B}\right)$

2 4) Matlab

Exercice 4

1 1) $\max J(a,b,c) = abc$ sous les contraintes

$$a \geq 0$$
$$b \geq 0$$
$$c \geq 0$$
$$a+b+c \leq 120$$

1 2) Existence : l'ensemble des contraintes est un compact $(\subset [0,120]^3)$ et J est continue, d'où l'existence

2 3) Il suffit de chercher le max parmi les triplets $a,b,c \,/\, a>0, b>0, c>0$ car sinon c'est clairement un minimum dont il s'agit.

On obtient comme condition d'optimalité

$$\begin{pmatrix} bc \\ ca \\ ab \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{d'où} \quad bc = ca = ab$$

$\Rightarrow a = b = c = 40$ c'est le cube

1,5 4) Matlab